журнал©
Квант

НОЯБРЬ ДЕКАБРЬ 2006 №6

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

квант

Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

Бюро Квантум

Речь с позиции физики и математики

Ю.БОГОРОДСКИЙ, Е.ВВЕДЕНСКИЙ

Современное образование немыслимо без компьютеров. Компьютер открывает перед учащимися, владеющими основами физических и математических знаний, возможность проведения сложных научных исследований.

В качестве примера попытаемся разобраться в таком вопросе: почему русский человек говорит на русском, англичанин – на английском, а китаец – на китайском языке? Дело ли в факте рождения в конкретной стране или в языковой среде, окружающей ребенка (или в чем-то другом)? В пользу того и другого мнения можно привести доводы «за» и «против». Пушкин до двух лет русского языка не знал и говорил только по-французски. Тургенев мог думать на французском языке, но свои замечательные произведения писал на русском. Поляк Дж.Конрад до 19 лет не знал английского языка, а стал классиком английской литературы. Даже любой полиглот, в совершенстве знающий несколько языков, все равно тяготеет к какому-то одному языку, и, скорее всего, к тому, на каком говорят его соотечественники.

Вопрос можно поставить иначе: почему человечество распалось на множество разных народов и не связано ли происхождение языка с физиологией человека? Для ответа на этот вопрос недостаточно знаний в области только языковедения, филологии и лингвистики – нужно знать также физику и математику.

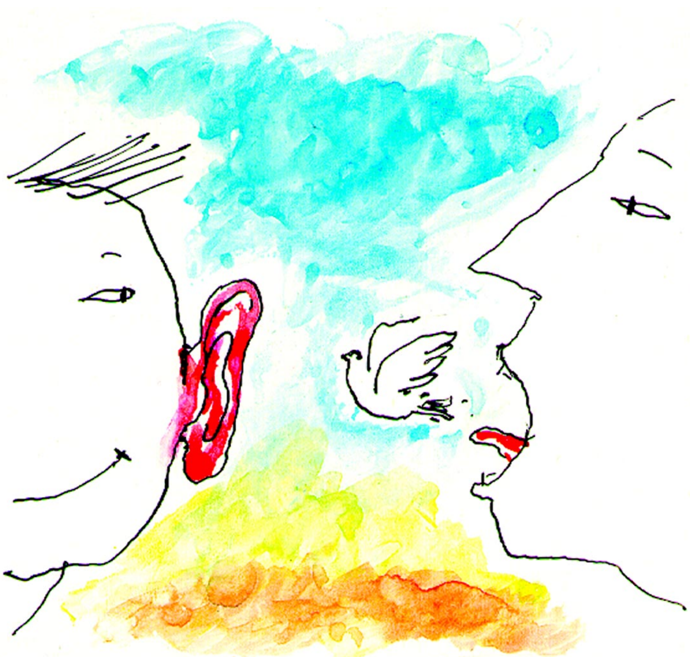


Иллюстрация П.Чернуского

Речь – продуктивный взаимообмен информацией

Люди способны передавать информацию разного рода и в разной форме. Глухонемые общаются между собой с помощью жестов. Слепой от рождения свободно читает литературу, написанную специальным рельефно-точечным шрифтом (система Брайля). У горных народов существует язык свистов, африканцы передают сообщения на значительные расстояния с помощью барабана-тамтама. Существуют разнообразные письменные языки, воспринимаемые органом зрения. Но все же самым распространенным средством общения остается обычный язык, осуществляемый речевым аппаратом и воспринимаемый слуховым аппаратом. Для этого в человека Природа закладывает от рождения два нужных органа. Один служит для возбуждения акустических волн (язык и гортань), другой – для улавливания и распознавания этих волн (уши и слуховой аппарат). Своим передающим устройством человек воспроизводит разнообразные сочетания звуков, которые принимаются органом слуха другого лица и дешифровываются его мозгом. Через такую акустическую взаимосвязь информация, порождаемая одним человеком, становится собственностью другого лица или нескольких лиц.

Взгляд физика на проблему

С точки зрения физики, обмен информацией между людьми происходит по следующей схеме. Есть передатчик, возбуждающий колебания воздуха, есть канал связи, по которому распространяются акустические волны, и есть приемник, улавливающий колебания воздуха. Источник информации управляет работой передатчика, а получатель информации – работой приемника.

В указанном наборе устройств неизбежны потери. Они возникают на стадии управления передатчиком, ибо нельзя создать механизм с коэффициентом полезного действия, равным или большим 100%. По такой же причине, но в бо́льших размерах возникают потери при рождении акустических волн в передатчике. Серьезное их затухание происходит и в канале связи, поскольку распространение акустических волн в значительной мере зависит от влажности воздуха, температуры, давления, наличия окружающих предметов и всякого рода шумов и помех. Вы чувствуете разницу при разговоре в метро или на тихом бесшумном бульваре, на фоне бескрайних снегов или при бешеном завывании ветра. Имеются также потери в приемнике. Один человек глуховат на одно ухо, другой – сразу на оба. Неизбежно теряется информация при обработке сигнала, поступающего в мозг из приемника.

Итак, с точки зрения физика, продуктивность общения по акустическому каналу зависит от конструкции передатчика и приемника, от параметров соединяющего их канала, от внешних помех и от способа обработки передаваемой и получаемой информации.

Звуковое общение с точки зрения инженера

Общение предполагает взаимообмен информацией, а потому каждый живой организм обладает способностью одновременно передавать информацию, контролировать ее передачу и воспринимать ответ. Если человек от рождения лишен слуха, то он не способен и говорить даже тогда, когда речевой аппарат, т.е. гортань и язык, у него в полном порядке. Он просто не знает, подчиняется ли ему язык. Беседа осуществляется только тогда, когда говорящий сам себя слышит. Хотя специальными приемами глухонемых и обучают произношению слов, но их речь скорее схожа со звуками механического робота.

На первый взгляд, проблема самоконтроля за речью проста. Уши на то и даны, чтобы слышать. Но представьте себе, что вы разговариваете с одним человеком на расстоянии одного метра, а с другим – на расстоянии десяти метров. Чтобы второй собеседник мог вас расслышать, вам приходится напрягать голос и даже кричать, если вокруг очень шумно. Это вызвано тем, что мощность акустических волн уменьшается с расстоянием по квадратичному закону. На расстоянии в десять метров она падает в сто раз по сравнению с расстоянием в один метр. Но ваши-то уши находятся от вашего рта на расстоянии нескольких сантиметров, поэтому собственные слова для вас во втором случае будут грому подобны.

Аналогичная ситуация наблюдается и в простейших радиоприемниках. Сигнал мощной радиостанции воспринимается хорошо, но подчас с искажениями, возникающими из-за перегрузки усилителя, а слабые станции еле слышны. Чтобы этого не происходило, выравнивание выходного звука в современных приемниках достигается с помощью электронного блока, встраиваемого внутрь аппарата. Он называется блоком АРУ, его назначение – автоматически регулировать усиление при переходе от одной станции к другой.

Автоматической регулировкой чувствительности органа слуха обладают все высокоразвитые существа. Но она не решает проблемы контроля над собственной речью, а только мешает, потому что в момент, когда вы говорите, ничего слышать, казалось бы, вы уже не можете. В действительности же восприятие внешних звуков не нарушается. Убедиться в этом просто. Поднесите к уху тикающие часы и пропойте гласную «а…». Вы будете слышать собственный звук на фоне тикающих часов. Значит, контроль над собственной информацией осуществляется у человека по другому каналу, не через воздух. Этот канал обладает другими параметрами, изменяющими окраску звуковой информации, в чем легко убедиться, записав свою речь на магнитофон. Оказывается, записанный голос разительно отличается от того, каким вы привыкли слышать себя в разговоре. Вы просто не узнаете его.

Избирательность информации с позиции физики

Окружающий воздух до отказа набит всевозможными звуками, создающими сплошной бессодержательный шум. Мы не ощущаем этого потому, что наш орган слуха и мозг реагируют только на определенные звуки, не воспринимая других. Удалите из радиоприемника все колебательные контуры, и в динамике вы ничего не услышите, кроме монотонного гула. А ведь в нем в это время «присутствуют» грозовые разряды, тысячи голосов радиостанций, радиоволны, создаваемые миллионами электронных устройств. Радиоприемник оказывается абсолютно бесполезным прибором, если в нем нет устройства, позволяющего выделять из безбрежного моря радиоволн нужный отрезок частот, поэтому в любом современном радиоприемнике имеется возможность как плавной, так и дискретной настройки на нужную радиостанцию.

То, что живой организм настроен на определенный диапазон звуковых волн, не вызывает сомнений. Вот под кустом вблизи грохочущей магистрали дремлет домашняя кошка. Шум машин и шаги пешеходов ей совсем не мешают. Но стоит вам тихо позвать «кис-кис», как уши ее моментально повернутся к вам. Реакция кошки объясняется тем, что ее орган слуха настроен на писк мышей и мелких птичек – объектов ее добычи, а вы своим «с…» имитируете этот звук.

Человек не способен улавливать звуки частотой выше 20000 Гц, а собака, например, воспринимает частоты до 38000 Гц (чем издавна пользуются браконьеры, подзывая собак ультразвуковыми свистками). Еще выше диапазон восприятия звука домашними кошками – до 70000 Гц. Ультразвуками общаются летучие мыши, а в море – дельфины. Как видим, все существа имеют настройку своих звуковых аппаратов, позволяющую им вычерпывать нужную информацию из хаоса звуков.

Остается ответить на такой важный вопрос: у сложного радиоприемника есть орган его перестройки, а есть ли нечто подобное у живых существ? Скорее всего, перестройка имеется, особенно у высокоразвитых существ. Им, с одной стороны, требуется разнообразная информация об окружающем мире, а с другой стороны – ее качественное выделение из шумов. Совместить широкую полосу с избирательностью принципиально нельзя, поэтому остается использовать путь селективных вольтметров и гетеродинных анализаторов спектра, применяемых в радиотехнике. Принцип работы их заключается в том, что избирательный орган перестраивается по частоте механически (у простейших приборов) или электронным путем. Каждый знает, что, увлеченные какой-либо работой, мы не замечаем звучащего радио, но когда раздаются сигналы точного времени, мы сразу реагируем на них. Дело в том, что их частота относится к сигналу тревоги, воспринимаемой подсознательно. Этот короткий сигнал, но повторяемый шесть раз подряд, обязательно улавливается сканирующим контуром и нашим сознанием.

Кроме описанного анализатора спектра, в приборостроении применяется схема, состоящая из ряда настроенных контуров. Сканирование осуществляется последовательным их переключением. Именно такой вариант используется в живых организмах.

Эволюция органов слуха

У змей нет ни органа слуха, ни голосового аппарата. Они способны лишь греметь костяными пластинками (гремучие змеи) или шипеть. Раскачивание кобры под звуки дудки факира воспринимается нами как танец под музыку, а на самом деле кобра всего лишь повторяет движения дрессировщика. Но змея ощущает вибрацию почвы, поэтому, когда вы, мягко ступая, идете по лесу, вы можете наступить на дремлющую рептилию и будете сразу же ужалены. Низшие существа – насекомые – не ощущают даже вибраций. Известно, что домашние тараканы часто заселяют большие часы – их не смущает движение шестеренок и стук храповика. Они любят поселяться в громко работающих репродукторах и часто устраивают короткое замыкание электропроводки.

Эти примеры показывают, что использование звука для получения информации об окружающем мире является более поздним приобретением по сравнению со зрением. Примитивные существа реагируют на общий поток звуковых колебаний, не различая его составляющих: мощный гул – верный признак опасности, слабый гул – все спокойно. Следующее достижение эволюции – выделение из общего звукового потока какой-то одной полосы частот, представляющих интерес для животного с точки зрения его безопасности или охоты. Это могут быть звуки, лежащие в диапазоне частот 10–100 Гц, что позволяет животному абстрагироваться от бесполезных звучаний и сосредоточиться на жизненно важных сигналах. У человека диапазон воспринимаемых звуков находится между 16 и 16000 Гц, а после 50 лет сокращается вдвое. Причем человек обладает способностью различать спектральный состав приходящих сигналов, на что примитивные существа не способны. Именно это обстоятельство и позволяет нам, людям, развивать речевое общение.

Механизм речевого общения с позиции физика

Разговаривая, мы создаем звуковую картину со сложным спектральным составом. Разобраться в ней можно, сканируя спектр перестраиваемым приемником. На входе такого приемника всегда есть избирательный контур с частотной характеристикой колоколообразного вида (рис.1). Такими характеристиками обладают системы, содержащие активные и реактивные элементы, зависящие от частоты. Образовать избирательную систему можно, например, из активного элемента A,

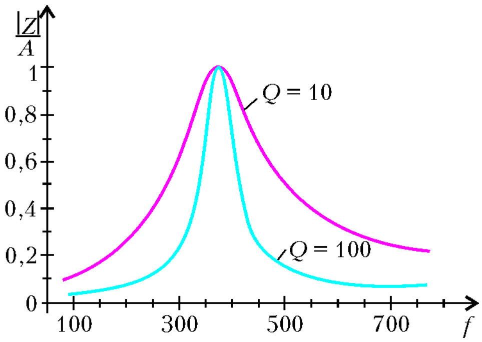


Рис.1. Избирательность системы при различных добротностях

независящего от частоты, и реактивного элемента B, изменяющегося с частотой f по закону iBf (здесь i – мнимая единица). В электротехнике из таких элементов создают полосовые фильтры, в которых активным элементом служит резистор, а реактивным – катушка индуктивности. Избирательными свойствами обладает также система, состоящая из активного элемента A и реактивного элемента C, изменяющегося с частотой по закону $1/(iCf)$. Реальными устройствами такого типа в электротехнике оказываются полосовые фильтры, содержащие конденсаторы.

Более высокой избирательностью обладают системы, состоящие из элементов A, B и C. В радиотехнике таким избирательным компонентом оказывается колебательный контур, состоящий из резистора, катушки индуктивности и конденсатора.

Это не значит, что избирательные системы состоят только из активных и реактивных элементов. Любой струнный или духовой инструмент обладает такими же качествами. Подтягивая струны гитары, мы настраиваем их на нужную частоту. Избирательностью обладают все внешние уши животных.

Частотная характеристика избирательного объекта

Частотная характеристика биологического объекта определяется параллельным соединением элементов A, B и C:

$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{A}+\frac{1}{iBf}+\frac{1}{1/(iCf)}=\frac{1}{A}+i\left(Cf-\frac{1}{Bf}\right).$$

Обозначим

$$BC=\frac{1}{f_0^2},\quad \frac{A}{Bf_0}=Q,$$

где f_0 – собственная частота, Q – добротность системы. Тогда частоты, пропускаемые системой, находятся по формуле

$$|Z|=\frac{A}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{f}{f_0}-\frac{f_0}{f}\right)^2}}. \qquad (1)$$

Избирательность системы определяется, главным образом, параметром Q. Его влияние показано на рисунке 1 для собственной частоты $f_0=400$ Гц.

Человек с точки зрения кибернетики

Величайшим достижением человечества стало открытие принципиальной возможности организации сложных процессов в системах, состоящих из простых элементов. Основой быстродействующих ЭВМ является электрическое реле, способное находиться лишь в двух состояниях – включено и выключено. Процессор современных компьютеров содержит миллионы подобных реле, и все сложные и сложнейшие манипуляции осуществляются ими. Точно так же сложнейшие действия человека – умственные, физические и физиологические – осуществляются нервной системой, состоящей из множества нервных клеток – нейронов. Каждый нейрон, подобно реле, может находиться в одном из двух состояний – спокойном и возбужденном. Состояния отличаются друг от друга лишь величиной электрического потенциала. У человека имеется не менее 10 миллиардов нейронов, что и делает его таким разносторонним и совершенным по сравнению с другими животными. Если природа создаст более совершенное существо, нежели человек, то оно будет иметь еще большее число нервных клеток.

Сравнение нервной системы человека и компьютера показывает, что природа пошла по пути организации избирательных систем зрения и слуха многократным повторением простых элементов. Вместо перестройки избирательного контура она применила множество контуров, отличающихся друг от друга числом элементов, а стало быть, и частотой их настройки. Сканирование внешнего сигнала в заданном диапазоне частот осуществляется простым переключением контуров.

Музыкальный слух

Человеку доступен практически безграничный набор музыкальных комбинаций. Но еще в античные времена Пифагор и его последователи обнаружили в экспериментах со струнами арфы, что слушателям нравятся или не нравятся определенные соотношения звуков. Звуки, отличающиеся в два раза по частоте, воспринимаются как согласованные. Это частоты 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096 и 8192 Гц. Звуки, лежащие по частоте между ними, образуют октавы, их всего девять. В пределах каждой октавы выделено семь музыкальных звуков, получивших название *до, ре, ми, фа, соль, ля, си.* Эти ноты соответствуют белым клавишам рояля.

На ранних стадиях эволюции человек различал в пределах октавы не более пяти характерных тонов. Затем выделил семь. Для клавесина Бах предложил ограничиться двенадцатью звуками в каждой октаве, образовав из них так называемый равномерно-темперированный строй (белые и черные клавиши рояля). Певцу, исполняющему музыкальное произведение без инструментального сопровождения, доступен 21 тон чистого строя. К сожалению, не все люди обладают одинаковым музыкальным слухом. Встречаются индивидуумы, которым «слон на ухо наступил», и есть небольшое число представителей с абсолютным музыкальным слухом. Все остальные занимают промежуточное положение между ними.

В теории музыки предполагается, что человек воспринимает гармонические колебания воздуха от 16,35 Гц (нижняя частота субконтроктавы – C_2) до 7902,15 Гц (верхняя частота пятой октавы – h^5). Весь диапазон музыкантами разбивается на 9 октав по 21 фиксированной частоте в каждой октаве. Значит, чтобы распознавать все эти частоты, нужно иметь $9 \times 21 = 189$ избирательных контуров.

Нетрудно найти их добротность, используя рисунок 2. Если известна частота $f_{0,7}$, на которой коэффици-

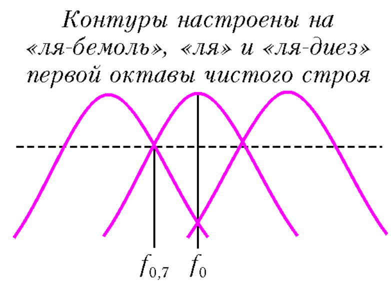


Рис.2. Определение добротности избирательных контуров

ент передачи контура ослабляется в $\sqrt{2}$ раз, то по формуле (1)

$$\frac{1}{Q} = \left|\frac{f_{0,7}}{f_0} - \frac{f_0}{f_{0,7}}\right|. \qquad (2)$$

Пусть каждый контур настроен на соответствующий тон первой октавы. Нота *ля* принята в музыкальном мире соответствующей частоте $f_0 = 440$ Гц, поэтому расположенная рядом нота *ля-диез* в чистом строе соответствует частоте 464,0625 Гц. Пересечение частотных характеристик происходит на среднегеометрической частоте, равной

$$f_{0,7} = \sqrt{440 \cdot 464{,}0625}\ \text{Гц} = 451{,}87\ \text{Гц}.$$

Такой частоте отвечает добротность Q = 18,78. Она одинакова и для всех других октав.

Ослабление тона *ля-диез* контуром, настроенным на *ля*, составляет 2,237, что вполне достаточно для четкого распознавания этих тонов. Если же добротность уменьшить в два раза, то ослабление соседнего тона составит всего 1,414 раза. При наличии внешних и внутренних помех распознавание тонов окажется под вопросом.

Получается, что у человека с плохим музыкальным слухом или не хватает числа избирательных контуров, или каждый из них имеет плохую добротность. Вполне возможно и то и другое одновременно.

Речевое общение с позиции физиолога

Приемная часть речевой информации – орган слуха – был исследован довольно детально в XIX веке. На рисунке 3 показан весь орган в разрезе.

Человеческое уход принято разделять на три части: *а* – наружное, *б* – среднее и *в* – внутреннее ухо.

Наружное ухо представляет собой акустическую систему (*1*), настроенную на определенный диапазон

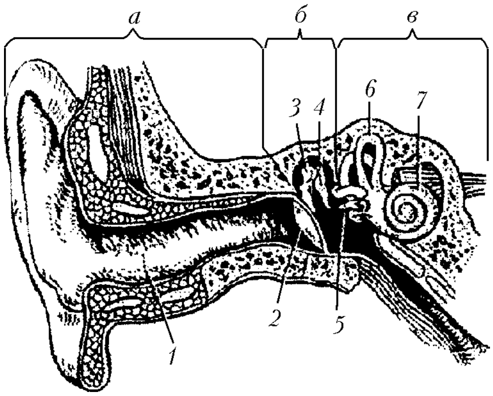


Рис.3. Орган слуха человека

звуковых частот. Это – позднее приобретение эволюции, которое имеют только млекопитающиеся. По сравнению с ухом кошки или собаки наружное ухо человека относительно малых размеров и не обладает способностью ориентироваться на звук. У рыб, змей, лягушек, муравьев и тараканов нет вообще ушных раковин. У человека наружное ухо заканчивается туго натянутой пленкой, получившей название барабанной перепонки (*2*). Под влиянием звука она совершает микроскопические колебания, которые воспринимаются средним ухом с помощью органа (*3*), называемого молоточком, и его продолжением (*4*) – наковаленкой. У музыкального инструмента барабана кожа натянута равномерно, поэтому при ударе он издает определенный звук. Барабанная же перепонка уха натянута неравномерно, поэтому собственной резонансной частоты не имеет, а значит, воспринимает звуковой диапазон поступающих волн более или менее равномерно.

Назначение молоточка и наковаленки в среднем ухе – заглушать сильный звук. Когда барабанщик желает приглушить издаваемый барабаном звук, он прижимает пальцами его мембрану. В ухе это происходит автоматически по команде центральной нервной системы. В результате получается своего рода автоматическая регулировка усиления, применяемая в радиоприемниках, о которой уже говорилось.

Звук, улавливаемый барабанной перепонкой, передается во внутреннее ухо с помощью косточки (*5*), называемой стремечком. Повреждение барабанной перепонки или удаление молоточка и наковаленки не лишает человека слуха, а лишь понижает его остроту. Катастрофа наступает с повреждением стремечка, поскольку через него возбуждаются звуковые колебания в жидкости внутреннего уха. По закону Паскаля давление в жидкости передается по всем направлениям одинаково, что позволяет на поверхности внутреннего уха размещать огромное множество нервных клеток, воспринимающих колебания.

Полукружные каналы (*6*) и орган (*7*), названный по своей форме улиткой, предназначены для анализа спектра звуковых колебаний по частоте, амплитуде и тембру. Кроме этого, полукружным каналам поручена дополнительная функция – они дают информацию о наклоне или движении головы. Укачивание на море происходит «благодаря» именно этому органу.

Простые сигналы, типа «да–нет», поступающие от сотен тысяч нервных клеток, играющих роль электронных реле, попадают в специальный отдел головного мозга. Здесь они сравниваются с программой, заложенной в нас от рождения, и вырабатывают ощущения страха, опасности, покоя, подъема, желания и других важных чувств.

Как уже обсуждалось, взаимообмен звуковой информацией осуществляется посредством передающих и приемных устройств. Ухо относится к приемному устройству, передающим устройствам является акустическая система, состоящая из легких, гортани, рта, языка. Гортань представляет собой духовой инструмент, настраиваемый с помощью многочисленных эластичных мышц. Меняя по-разному конфигурацию гортанной трубы, человек способен извлекать музыкальные звуки в определенном, только ему свойственном диапазоне частот.

Голосовой аппарат человека является вершиной эволюции. У рыб, пресмыкающихся и насекомых ничего похожего на наш аппарат нет. Певчие птицы и коты во время брачных ухаживаний издают разнообразные, преимущественно музыкальные, звуки, но они не способны легко и свободно воспроизводить комбинации звуков, составляющих человеческую речь. Человекообразных обезьян вообще невозможно научить говорить, потому что их орган речи устроен иначе, им подвластен только язык глухонемых.

Позднейшим приобретением эволюции является окончание гортани в виде полости рта и носа. В зависимости от положения языка и губ усиливаются или ослабляются различные обертоны, содержащиеся в гортанном звуке. Так возникают гласные и согласные звуки. Управляет всем этим отдел нервной системы, находящийся в головном мозге, при этом взаимообмен звуковой информацией осуществляется разными его областями. В левом полушарии находится так называемый центр Брока. Его повреждение приводит к тому, что пострадавший понимает обращенную к нему речь, но сам говорить не может. Если же поражен центр Вернике, находящийся в задней части верхней височной извилины, то понимание речи становится недоступной.

Управление речью осуществляется гибко и многоступенчато. Прежде чем привести в действие мышцы гортани и языка, мысль проговаривается внутренне, редактируется, для чего используется ее временное сохранение (запись), и уж потом подается команда на исполнение. Эти процессы протекают настолько быстро, что человеку кажется, что он говорит не обдумывая. Однако нарушение промежуточной записи приводит к тому, что больной человек озвучивает все свои мысли, не замечая того, что говорит вслух.

Зачем человеку два уха?

Самый распространенный ответ физиологов на этот вопрос звучит так: два уха, как и два глаза, необходимы для определения направления и расстояния до источника звука. Ответ верный, но не исчерпывающий. Это все равно что сказать: уши даны для того, чтобы человек сохранял равновесие и чувство пространства.

Это свойство ушей использует даже глухонемой, но они все же нужны не для этого. Определение направления на источник звучания является дополнительным свойством бинарного слуха, и выполняется эта функция у человека по сравнению с кошкой или собакой исключительно плохо. Чаще всего оба уха имеют разную остроту восприятия (заложенность, воспалительные процессы), о чем человек может и не догадываться. Для жизнедеятельности человека эти дефекты не играют практической роли, поэтому наши ушные раковины не ориентируются на приходящие звуки, как наблюдается у собак или кошек. Удвоение органа слуха преследует совершенно другие цели. Здесь снова придется обратиться за помощью к физике.

Напомним, что характеристика резонансного элемента имеет колоколообразный вид (рис.4). Все частоты справа и слева от собственной частоты элемента ослабляются плавно, а значит, ненужные частоты хотя бы и в ослабленном виде все равно проникают на выход. Лучшим избирательным элементом было бы гипотетическое устройство с П-образной частотной характеристикой. Но получить такую характеристику нельзя, можно лишь максимально приблизиться к ней.

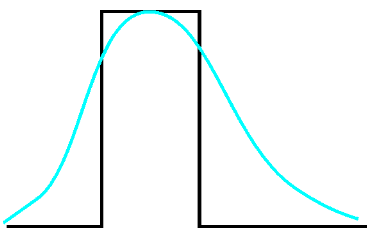


Рис.4. Колоколообразная и П-образная характеристики избирательных элементов

В радиоприемниках высокого класса почти прямоугольные характеристики достигаются с помощью нескольких взаимосвязанных контуров. На рисунке 5 показано, как из пяти колоколообразных характеристик получается почти П-образная форма. Чем больше контуров, тем лучше приближается характеристика к идеальной форме. Но добавление каждого элемента требует дополнительных затрат, которые должны быть экономически обоснованы. Остается определить, сколькими избирательными элементами довольствуется человек.

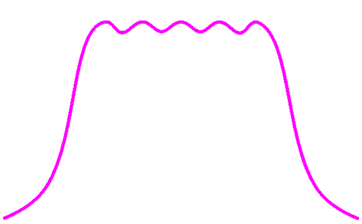


Рис.5. Частотная характеристика усилителя с пятью контурами

Приемник звуковых колебаний у человека состоит из органа слуха, нервных клеток, переводящих звуковые колебания в нервные импульсы, и определенного отдела головного мозга, обрабатывающего их. У человека два уха и два полушария головного мозга. Чтобы возникла бинарная акустическая система из двух одинаковых подсистем, необходимо обеспечить между ними определенную связь. В радиоприемниках такая связь осуществляется с помощью взаимоиндукции или через конденсаторы связи. Форма частотной характеристики в этом случае определяется добротностью контуров и величиной взаимосвязи. Если произведение $Qk \ll 1$, где k – коэффициент связи, то форма характеристики остается колоколообразной. Если $Qk \gg 1$, то появляется глубокий провал (рис.6). Нейрофизиологами установлено, что отделы головного мозга, отвечающие за слух, имеют небольшое число общих нервных волокон. Количество их природа установила таким, чтобы провал на частотной характеристике был незначительным.

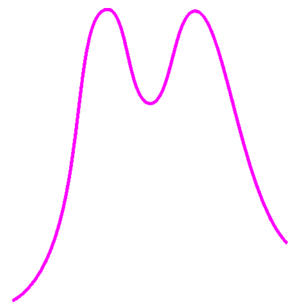


Рис.6. Сильная связь между двумя контурами

Если взглянуть на проблему бинарного слуха с позиции истоков мироздания, то оснащение живых организмов дублетными органами происходило не сразу, а по мере усложнения существ. На начальном этапе эволюции все организмы имели примитивное строение. У них не было органов слуха и зрения. Они реагировали только на общую интенсивность светового излучения. При освещении амебы узким пучком света она уползала в тень. Для сохранения своей жизнедеятельности слух ей не требовался. Эволюция в целом всегда идет по пути совершенствования организмов. На новом этапе развития возникает мозаичный глаз, состоящий из сотен элементарных глазков. Затем появляются организмы, оснащенные парой мозаичных глаз. Такими глазами снабжены современные насекомые: мухи, стрекозы и бабочки. Изобретение оказалось удачным. С этих пор двойными глазами оснащаются все организмы. Был также опробован путь утроения глаза. Три глаза имеют, например, современные тараканы. Однако законы развития запрещают трехкратное повторение, так что данный путь оказался бесперспективным.

Совершенствование организма пошло по пути усложнения конструкции глаза и оснащения его органом слуха, сначала распределенным по поверхности тела, затем сконцентрированным в определенном месте, и, наконец – удвоения органов, как у всех высших животных.

Существенное отличие органов слуха от органов зрения

Органы слуха и зрения предназначены для получения организмом жизненно важных сведений о среде обитания. В этом их общность. Но для целей взаимообмена информацией между отдельными существами все преимущества – за слуховым аппаратом. В отличие от акустической связи, зрение не имеет своего передатчика. Информация передается только позами, мимикой, движением рук человека или хвоста, как у животных. Чтобы сведения были поняты, необходим внешний источник света. В темноте визуальная связь не работает, как не работает и вне прямой видимости.

При акустической связи сам организм решает вопрос, посылать ли ему информацию в окружающий мир. Весной, когда пробуждается лес к новой жизни, над куполами пышных деревьев разносится голос кукушки. Его слышат все обитатели леса, ему не мешает погода, отсутствие видимости, ограниченность территории. Чтобы дать сведения о себе, кукушке надо затратить энергию на возбуждение звуковых колебаний. Эта энергия распространяется во все стороны, постепенно ослабевая. Все другие животные, не только кукушки, улавливают позывные с помощью своих акустических средств. Какой бы высокой чувствительностью их приемники ни обладали, они бесполезны, если на вход не приходит определенная доля энергии акустических волн. Именно она вызывает раскачивание барабанных перепонок ушей.

Квадратичные зависимости возникают в окружающем мире всегда, когда идет речь о мощностях или энергиях: кинетическая энергия поступательно движущегося тела равна $mv^2/2$; кинетическая энергия вращающегося тела – $I\Omega^2/2$; энергия заряженного конденсатора – $q^2/(2C)$; мощность, рассеиваемая в цепи тока, – RI^2 и т.д. Обращаясь к формуле (1), находим энергетическую характеристику и приемо-передающего органа живого существа:

$$E = \frac{D}{1 + Q^2\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)^2}. \quad (3)$$

Поскольку прием звуковой информации обеспечивают два идентичных канала, то необходимо учитывать определенную связь между ними, приводящую к двугорбой характеристике. Для этого стоит использовать результаты, полученные в теории связанных контуров. Доказано, что система из идентичных контуров, связанных друг с другом через коэффициент связи k, полностью эквивалентна системе несвязанных контуров, настроенных на разные частоты. Расчеты таких систем значительно упрощаются:

$$\frac{E}{D} = \frac{1}{1 + Q^2\left(\frac{f}{f_1} - \frac{f_1}{f}\right)^2} + \frac{1}{1 + Q^2\left(\frac{f}{f_2} - \frac{f_2}{f}\right)^2}. \quad (4)$$

Другая замечательная особенность этой формулы – одинаковые результаты, получаемые при замене частоты f на длительность колебаний t:

$$\frac{E}{D} = \frac{1}{1 + Q^2\left(\frac{t}{t_1} - \frac{t_1}{t}\right)^2} + \frac{1}{1 + Q^2\left(\frac{t}{t_2} - \frac{t_2}{t}\right)^2}. \quad (5)$$

В задачах взаимообщения с помощью звука действительно удобнее оперировать с длительностью сигналов, нежели с их частотой. Так, контролируя секундомером время чтения текста, легко убедиться, что на произношение слова из шести букв требуется полсекунды. Пусть левое уход настроено на длительность приходящих сигналов 0,4 с, а правое – на 0,6 с. Тогда при добротности $Q = 2$ и $D = 100$ энергия, рассчитанная по формуле (5), будет выглядеть, как показано на рисунке 7. Небольшая двугорбость характеристики свидетельствует о правильности выбора исходных параметров, как следует из предыдущего раздела Тем не менее, для большей убедительности следует обратиться к результатам, достигнутым языкознанием.

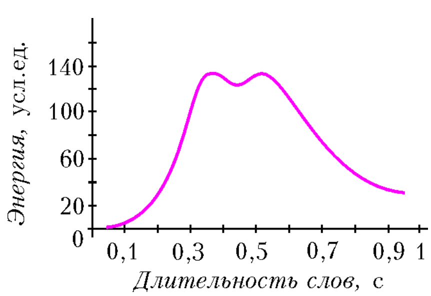


Рис.7. Энергия звуковых колебаний, улавливаемая органом слуха

Звуковое общение с позиции лингвистики

Лингвистика, или наука о человеческом языке как средстве общения, зародилась 2500 лет назад. В настоящее время она представляет собой широко разветвленную дисциплину. Наиболее важная часть ее – фонетика, которая изучает звуковой строй языка. С появлением письменности к речевому общению подключился визуальный канал. С этого времени одна и та же информация передается и воспринимается принципиально разными способами: слухом и зрением. Транслятором здесь (компилятором – в терминах информатики) служит грамматика, позволяющая переходить от акустического языка к языку визуальному.

Современная русская письменность базируется на алфавите, состоящем из 33 букв, однако в современном русском языке насчитывается 45 главных звуков. Грамматика как раз и позволяет сделать правописание экономным. Если обратиться к клавиатуре пишущей машинки или компьютера, то легко заметить, что буквы на ней проставлены не по алфавиту. Центральную часть занимают 12 букв:

к а м е п и н р т г о ь.

Именно они являются наиболее часто встречаемыми знаками письменной речи. Особая роль здесь отводится мягкому знаку. С его помощью вместо 11 звуков (*ь* – не является звуком) получаются 18 – добавляются новые звуки: кь, мь, пь, нь, рь, ть, гь, поэтому мягкий знак позволяет существенно сжимать письменную информацию.

Из звуков создаются слова, из слов – предложения. Формально из n букв можно образовать $\frac{n!}{(n-m)!}$ слов, содержащих m букв. Из 11 вышеуказанных букв (не считая *ь*) получится 110 двухбуквенных слов, 990 трехбуквенных слов и т.д. Всего может быть образовано 68,5 миллионов слов длиной от двух до десяти букв. На деле таких слов набирается мало, чуть больше 2000, из-за того что не все сочетания букв допускает язык. Такая привередливость языка обусловлена тем, что в основе звуковой передачи лежит принцип разборчивости речи. Она же зависит не только от конструкции гортани и рта, но и от внешних помех. Это может быть шум леса, грохот падающего водопада, завывание ветра. В условиях постоянной борьбы за существование жизнеспособными оказывались племена, общающиеся между собой на разборчивых для данной местности языках.

Экспериментальное доказательство

В настоящее время поколениями филологов и лингвистов созданы разные виды словарей русского языка: толковые, орфографические, частотные, синонимов, сводные и другие. Располагая подобными словарями, можно было бы выяснить, какое количество слов приходится в языке на разную их длину. Частично такая работа проделана авторами частотного словаря русского языка. Оказывается, наиболее употребительны слова из шести-семи букв. Однако эти выводы сделаны не для всего объема русских слов, изобретенных народом. Современный сводный словарь охватывает 170 тысяч слов. Это лишь незначительная доля того, что допускают законы комбинаторики. Тем не менее, работать с таким массивом задача технически трудная, поэтому ограничимся частной, но важной задачей.

А именно, построим характеристику наиболее часто встречаемых слов, ограничивая их объем частотой встречаемости, равной 7 из одного миллиона словоупотреблений. Таких слов по частотному словарю оказалось 11267. Распределение их по длине показано на рисунке 8.

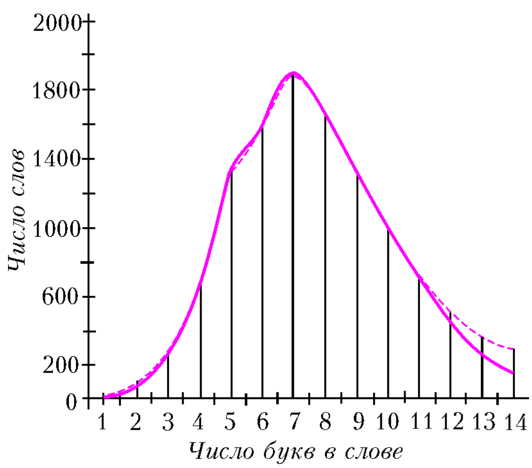


Рис.8. Зависимость числа слов от их длины

Анализ характеристики свидетельствует, что она исключительно точно описывается пятью резонансными звеньями формулы (3), если частоту акустических волн заменить длительностью слова, а длительность слова – числом составляющих его букв:

$$N_n = \sum_{m=1}^{5} \frac{P_{2m+1}}{1 + Q^2 \left(\frac{n}{2m+1} - \frac{2m+1}{n} \right)^2} . \qquad (6)$$

Здесь N_n – число слов, содержащих n букв; m – номер резонансного звена (их пять); Q – добротность звена, равная 5; P_{2m+1} – коэффициенты каждого звена (которые находятся по фактическим данным): $P_3 = 51,4414$, $P_5 = 823,4799$, $P_7 = 1373,6277$, $P_9 = 556,6676$, $P_{11} = 85,1854$. Результаты расчетов по формуле (6) показаны пунктиром на рисунке 8.

В целом формула (6) убедительно отражает действительность. Расхождение для коротких слов объясняется тем, что частотные словари не учитывают ненормативную лексику, которая в разговорном общении употребляется широко. Расхождение же на спадающей части характеристики вызвано тем, что наука и техника существенно расширяют словарь современного человека путем применения более длинных слов. Если вместо 11 тысяч использовать 110 тысяч слов, то различия наблюдаться не будет. Полного совпадения, однако, не следует ожидать, ибо язык непрерывно меняется. Какие-то слова ветшают и исчезают из обихода, а новые термины и обороты не сразу становятся общепризнанными.

Заключение

Физика, математика, физиология и лингвистика убеждают, что в основе разнообразия языков на Земле лежат сугубо природные факторы. Подобно тому, как жители экваториальных районов имеют темную кожу, а жители Китая – характерный разрез глаз, среда обитания, формирующая внешний облик людей, изменяет и внутренние органы. Наглядным доказательством этого служат, например, серповидные клетки крови африканцев, делающие их нечувствительными к малярии, перед которой практически беззащитны все европейцы. Если внешние признаки: цвет кожи, волос и глаз, конфигурация головы и пропорции туловища (англичане в среднем имеют более длинные ноги, нежели славяне) легко устанавливаются антропологическими измерениями, то в отношении тонких различий между органами слуха и речи разных народов этого сделать нельзя. Принцип действия и набор элементов, определяющих речевое общение, у всех представителей человечества одинаковы. Различие может быть только в параметрах и схемных решениях, подобно тому как в радиоприемных устройствах разная чувствительность и избирательность достигаются различным соединением и комбинированием одних и тех же компонентов. Среда обитания накладывает отпечаток на разборчивость речи и, действуя день за днем, час за часом, вынуждает людей не только совершенствовать фонетику и грамматику языка, вводя в него элементы избыточности, но и соответственно приспосабливать физиологию гортани и слухового аппарата.

В том, что эти органы у разных народов разные, вряд ли удастся убедиться инструментальным путем, куда проще использовать связь между длиной слова и частотой его применения. Из графика, подобного графику на рисунке 8, можно вычислить число и параметры резонансных объектов, организующих речь каждого этноса. Они и позволят судить о том, на каком этапе развития находятся его речевые возможности. Задача сама по себе очень важная. Может быть, попробуете ее решить?

Окружности на решетках

В.ВАВИЛОВ, А.УСТИНОВ

Статья посвящена изучению возможных расположений окружности на декартовой плоскости и выяснению ситуаций, когда для заданного натурального числа n окружность внутри себя содержит ровно n узлов целочисленной решетки $\mathbf{Z}^2$ или проходит ровно через n ее узлов.

Теоремы Гаусса

Первое исследование решетки $\mathbf{Z}^2$ как математического объекта было, по-видимому, предпринято К.Гауссом – королем математики, как его называли современники. Он заинтересовался вопросом о том, как быстро с ростом R растет число $N(R)$ точек с целыми координатами в круге

$$K(R) = \left\{(x;\, y) : x^2 + y^2 \le R^2\right\},$$

где $R \ge 0$ целое число. Число $N(R)$ равно площади фигуры $F(R)$, составленной из тех единичных квадратов решетки, у которых левый нижний угол лежит в $K(R)$ (рис.1).

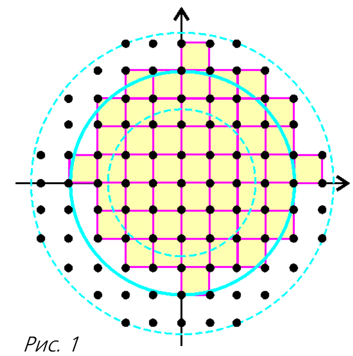


Рис. 1

Так как наибольшее расстояние между двумя точками единичного квадрата не превосходит $\sqrt{2}$, то ясно, что все квадраты, которые пересекаются окружностью $x^2 + y^2 = R^2$, расположены в кольце (при $R = 4$ его границы на рисунке 1 изображены пунктиром)

$$\left\{(x;\, y) : \left(R - \sqrt{2}\right)^2 \le x^2 + y^2 \le \left(R + \sqrt{2}\right)^2\right\}.$$

Площадь этого кольца равна

$$\pi\left(\left(R + \sqrt{2}\right)^2 - \left(R - \sqrt{2}\right)^2\right) = 4\pi\sqrt{2}R,$$

и поэтому

$$\left|\left[F(R)\right] - \pi R^2\right| < 4\pi\sqrt{2}R,$$

где $[F]$ обозначает площадь фигуры F.

Итак,

$$\left|\frac{N(R)}{R^2} - \pi\right| \le \frac{4\pi\sqrt{2}}{R}.$$

Таким образом, при всех достаточно больших R имеет место приближенное равенство

$$\frac{N(R)}{R^2} \approx \pi,$$

что в более точной форме можно записать в виде отдельного утверждения.

Теорема 1 (К. Гаусс). *Имеет место соотношение*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{N(R)}{R^2} = \pi. \qquad (1)$$

Гаусс (как написано в книге [1]) численно проверил точность формулы (1), составив таблицу, где в последней строке приводятся приближенные значения для числа π:

R	10	20	30	100	200	300
$N(R)$	317	1257	2821	31417	125629	282697
π	3,17	3,1425	3,134	3,1417	3,140725	3,14107

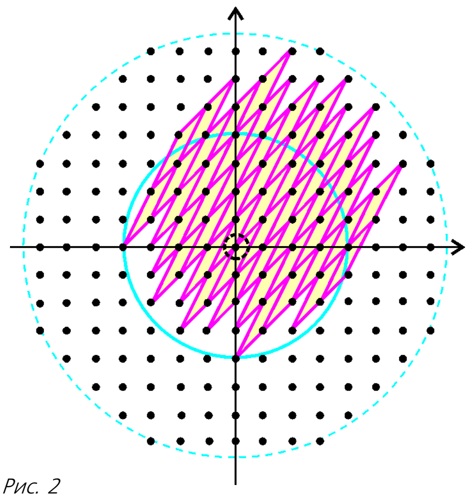


Рис. 2

Доказанное равенство (1) связано с одним из основных свойств решетки $\boldsymbol{Z}^2$: *площадь любого параллелограмма* П, *порождающего решетку* $\boldsymbol{Z}^2$, *равна 1*. Такие параллелограммы называются фундаментальными. Говорят, что параллелограмм порождает решетку $\boldsymbol{Z}^2$, если вся плоскость разбита (без наложений) на равные П параллелограммы, а множество вершин всех параллелограммов разбиения совпадает с множеством всех узлов целочисленной решетки.

Для доказательства сформулированного утверждения установим взаимно однозначное соответствие между фундаментальными параллелограммами и узлами решетки $\boldsymbol{Z}^2$. Сопоставим каждому параллелограмму его самую левую вершину, а если таких вершин две, то из них выберем ту, которая имеет наименьшую ординату. Модуль разности площади круга $K(R)$ и площади фигуры F, состоящей из объединения всех параллелограммов, которые соответствуют узлам из $K(R)$, меньше площади кольца

$$\left\{(x;\, y) : (R-a)^2 \le x^2 + y^2 \le (R+a)^2\right\},$$

где a – наибольшая диагональ параллелограмма П (на рисунке 2 R = 4 и $a = \sqrt{13}$). Если $[\Pi] = \Delta$, то $[F] = \Delta \cdot N(R)$ и, следовательно,

$$\left|\Delta \cdot N(R) - \pi R^2\right| < \pi\left((R+a)^2 - (R-a)^2\right) = 4a\pi R .$$

Значит,

$$\left|\frac{N(R)}{R^2} - \frac{\pi}{\Delta}\right| < \frac{4a\pi}{R\Delta} .$$

Устремляя R к бесконечности, по доказанному выше получаем, что

$$\pi = \lim_{R\to\infty} \frac{N(R)}{R^2} = \frac{\pi}{\Delta} = 1 ,$$

т.е. $\Delta = 1$.

Получим еще одно интересное следствие формулы (1). Величина $N(R)$ представляет собой число всех упорядоченных пар целых чисел $(x;\, y)$, для которых $x^2 + y^2 \le R^2$. Для любого узла $(x;\, y) \in \boldsymbol{Z}^2$ число $x^2 + y^2$ является целым. Поэтому если $r(k)$ обозначает число всех различных способов представления натурального k в виде суммы двух квадратов целых чисел (представления $k = a^2 + b^2 = (-a)^2 + b^2 = a^2 + (-b)^2 = (-a)^2 + (-b)^2$ считаются попарно различными), то

$$N(R) = r(0) + r(1) + \ldots + r(n) ,$$

где $n = R^2$.

Теорема 2 (К.Гаусс). *Справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r(0) + r(1) + \ldots + r(n)}{n} = \pi .$$

Отметим, что сама функция $r(n)$ ведет себя не регулярно. Например, $r(0) = 1$, $r(1) = 4$, $r(2) = 4$, $r(3) = 0$, $r(4) = 4$, $r(5) = 8$, $r(6) = 0$, $r(7) = 0$, $r(8) = 4$, … …, $r(21) = 0$, $r(22) = 0$, $r(23) = 0$, $r(24) = 0$, $r(25) = 12$.

Представление чисел суммой двух квадратов

С геометрической точки зрения величина $r(k)$ – это количество целых точек на окружности радиуса k с центром в начале координат. Ниже нам понадобятся формулы для вычисления значений функции $r(k)$.

Для натурального m запись $a \equiv b \pmod m$ означает, что числа a и b дают одинаковые остатки при делении на m; другими словами, $a = mt + b$ ($t \in \boldsymbol{Z}$).

Инструментом для дальнейших построений является следующий важный результат.

Теорема 3 (о представлении целых чисел суммой двух квадратов). *Пусть n > 1 – натуральное число.*

а) Тогда

$$r(n) = 4\left(d_1(n) - d_3(n)\right) ,$$

где $d_1(n)$ – количество делителей числа n вида $4k$ + + 1 и $d_3(n)$ – количество делителей n вида $4k$ + 3.

б) Если $n = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k} q_1^{\beta_1} \ldots q_l^{\beta_l}$ – каноническое разложение n на простые множители, в котором $p_j \equiv 1 \pmod 4$, $q_j \equiv 3 \pmod 4$, то

$$r(n) = \begin{cases} 4(\alpha_1 + 1)\ldots(\alpha_k + 1), & \text{когда } \beta_1, \ldots, \beta_l \text{ четные;} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Полное доказательство этой теоремы, использующее свойства комплексных чисел, можно найти в статье А.Гончарова «Арифметика гауссовых чисел» («Квант» №12 за 1985 г.).

Отметим один полезный частный случай теоремы 3: уравнение

$$x^2 + y^2 = 5^k \;\; (k \ge 0)$$

имеет $4(k+1)$ целочисленных решений; другими словами, *окружность радиуса* $5^{k/2}$ *с центром в начале координат проходит в точности через* $4(k+1)$ *узлов решетки* $\boldsymbol{Z}^2$.

Теорема 3 имеет много различных приложений. В качестве первого из них приведем доказательство формулы Лейбница, которая на первый взгляд не связана ни с решетками, ни с представлениями чисел в виде суммы двух квадратов.

Теорема 4 (Г.Лейбниц). *Справедливо равенство*

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4},$$

где под выражением слева понимается

$$\lim_{n\to\infty} S_n,\ \ S_n=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Доказательство. Согласно утверждению а) теоремы 3,

$$N(R)=1+4\sum_{n=1}^{R^2}\left(d_1(n)-d_3(n)\right).$$

В то же время,

$$\sum_{n=1}^{R^2} d_1(n)=\left[\frac{R^2}{1}\right]+\left[\frac{R^2}{5}\right]+\left[\frac{R^2}{9}\right]+\ldots,$$

где справа стоит конечная сумма, а равенство справедливо, поскольку каждое слагаемое вида $\left[\frac{R^2}{k}\right]$ (k = = 1,5,9,13,...) равно количеству чисел, кратных k, в множестве $\{1, 2, 3, \ldots, R^2\}$. Аналогично,

$$\sum_{n=1}^{R^2} d_3(n)=\left[\frac{R^2}{3}\right]+\left[\frac{R^2}{7}\right]+\left[\frac{R^2}{11}\right]+\ldots$$

Следовательно,

$$\frac{1}{4}(N(R)-1)=\left[\frac{R^2}{1}\right]-\left[\frac{R^2}{3}\right]+\left[\frac{R^2}{5}\right]-\left[\frac{R^2}{7}\right]+\left[\frac{R^2}{9}\right]-\left[\frac{R^2}{11}\right]+\ldots$$

Определим $\sigma_n(R)$ равенством

$$\frac{1}{4}(N(R)-1)=\left[\frac{R^2}{1}\right]-\left[\frac{R^2}{3}\right]+\ldots+\left[\frac{R^2}{4n+1}\right]-\left[\frac{R^2}{4n+3}\right]+\sigma_n(R).\quad (2)$$

С одной стороны, остаток $\sigma_n(R)$ неотрицателен, так как

$$\sigma_n(R)=\left(\left[\frac{R^2}{4n+5}\right]-\left[\frac{R^2}{4n+7}\right]\right)+\left(\left[\frac{R^2}{4n+9}\right]-\left[\frac{R^2}{4n+11}\right]\right)+\ldots\geq 0$$

(каждая скобка неотрицательна). С другой стороны,

$$\sigma_n(R)=\left[\frac{R^2}{4n+5}\right]-\left(\left[\frac{R^2}{4n+7}\right]-\left[\frac{R^2}{4n+9}\right]\right)-\ldots\leq\left[\frac{R^2}{4n+5}\right].$$

Пусть $R = 4n + 3$. Тогда очевидно, что $0\leq\sigma_n(R)\leq R$. Если в формуле (2) отбросить все целые части, то ее правая часть (по модулю) изменится не более чем на R. Таким образом,

$$\frac{1}{4}(N(R)-1)=R^2\left(1-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+3}\right)+2\theta R,$$

или

$$\frac{N(R)-1}{4R^2}=1-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{R-2}-\frac{1}{R}+\frac{2\theta}{R},$$

где $|\theta|\leq 1$. Устремляя теперь R к бесконечности, с учетом равенства (1) получаем формулу Лейбница.

Окружности Шинцеля

Сначала отметим, что для любого натурального числа n существует круг с центром в точке $\left(\sqrt{2};1/3\right)$, который содержит внутри себя n точек целочисленной решетки. Для доказательства этого покажем, что если $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$ – два различных узла целочисленной решетки, то *они находятся на различных расстояниях от точки* $\left(\sqrt{2};1/3\right)$. Действительно, если

$$\left(x_1-\sqrt{2}\right)^2+\left(y_1-\frac{1}{3}\right)^2=\left(x_2-\sqrt{2}\right)^2+\left(y_2-\frac{1}{3}\right)^2,$$

то

$$\left(x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2-\frac{2}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2-2\sqrt{2}(x_1-x_2)\right)=0.$$

Отсюда следует, что

$$x_1=x_2 \text{ и } y_1^2-y_2^2-\frac{2}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2=0.$$

Второе равенство означает, что

$$\left(y_1-\frac{1}{3}\right)^2=\left(y_2-\frac{1}{3}\right)^2,\text{ или } 3y_1-1=\pm(3y_2-1),$$

т.е. либо $y_1=y_2$, либо $3(y_1+y_2)=2$, что невозможно. Таким образом, $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$. Итак, можно выбрать такую растущую последовательность радиусов R_n, что в круге $\left(x-\sqrt{2}\right)^2+(y-1/3)^2=R_n^2$ будет содержаться в точности n точек.

Более интересным и трудным является следующий вопрос: *сколько точек решетки* $\mathbf{Z}^2$ *может попасть на окружность?*

Легко отыскать окружности, которые проходят через 1, 2, 3 или 4 точки (найдите их самостоятельно). Нетрудно придумать примеры для n = 8 и n = 12 (рис. 3, 4).

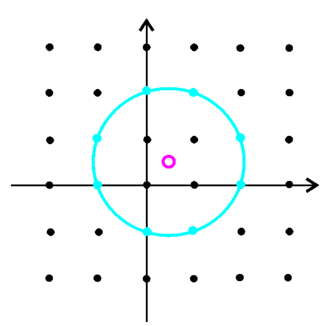


Рис. 3

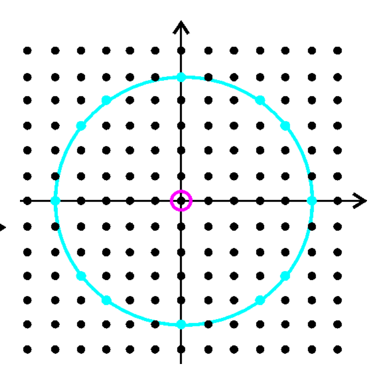


Рис. 4

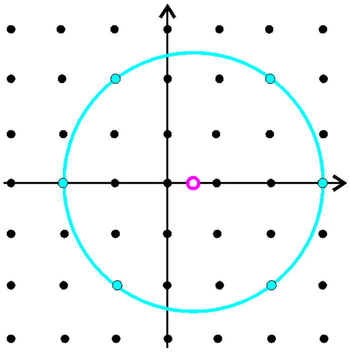


Рис. 5

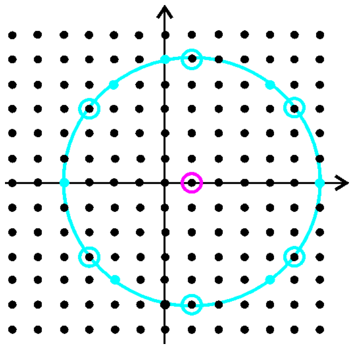


Рис. 6

Менее тривиален случай, когда $n = 6$ (рис.5). Внимательно сравнив окружности на рисунках 4 и 5, можно догадаться, как был построен этот пример. Окружность радиуса 5 была нарисована с центром в точке (1; 0) (рис.6). Из 12 точек на ней 6 имеют четные координаты, т.е. являются узлами решетки $(2\mathbf{Z})\times(2\mathbf{Z})$, которая состоит из точек с четными координатами. Рассматривая эту более крупную решетку, мы и получаем рисунок 5.

Однако, имея только эти примеры, не вполне ясно, существуют ли окружности, на которых лежат 5, 7 или 17 точек.

Теорема 5 (А.Шинцель). *Для любого натурального n существует окружность, которая проходит ровно через n точек решетки* $\mathbf{Z}^2$.

Доказательство. Утверждение б) теоремы 3, конечно, позволяет для любого n построить окружность, на которой лежат в точности $4n$ точек. Для этого достаточно поместить центр окружности в начало координат, а в качестве радиуса выбрать число $R = 5^{(k-1)/2}$ (см. замечание после теоремы 3).

Рисунок 5 с шестью точками на окружности наталкивает на мысль, что полезно рассмотреть окружности с центром в точке $(1/2; 0)$. Если в качестве радиуса взять число $R = 5^{(k-1)/2}/2$, то уравнение окружности запишется в виде

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5^{k-1}}{4}, \qquad (3)$$

или

$$(2x-1)^2 + (2y)^2 = 5^{k-1}. \qquad (4)$$

Как уже отмечалось раньше, уравнение

$$a^2 + b^2 = 5^{k-1} \qquad (5)$$

имеет $4k$ решений. Ясно, что в равенстве (5) одно из чисел a, b должно быть четным, а второе – нечетным. В уравнении (4) четность каждого из слагаемых фиксирована, и поэтому из каждых двух решений (a, b), (b, a) уравнения (5) получается ровно одно решение уравнения (4) (черные и белые точки на рисунке 6 симметричны относительно прямой $y = x - 1$). Таким образом, уравнение (4) имеет $2k$ решений (в 2 раза меньше, чем уравнение (5)).

Итак, мы можем построить окружность с любым четным количеством точек на ней. Например, чтобы получить окружность с 10 точками решетки $\mathbf{Z}^2$, достаточно в уравнении (4) взять $k = 5$ (рис.7).

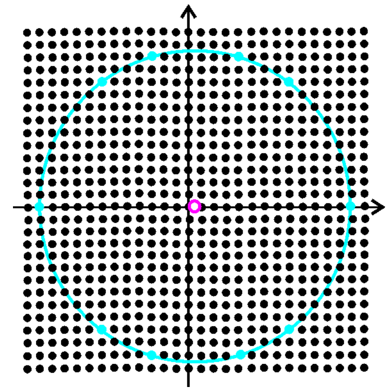


Рис. 7

Понятно, что точку $(1/2; 0)$ нельзя брать в качестве центра, если мы хотим найти окружность с нечетным числом целых точек на ней (рисунок всегда симметричен относительно прямой $x = 1/2$). Оказывается, что для этого достаточно сдвинуть центр круга в точку $(1/3; 0)$. Действительно, запишем уравнение окружности с центром $(1/3; 0)$ и радиусом $5^k/3$:

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{5^{2k}}{9}, \qquad (6)$$

или

$$(3x-1)^2 + (3y)^2 = 5^{2k}. \qquad (7)$$

По утверждению б) теоремы 3, уравнение

$$a^2 + b^2 = 5^{2k} \qquad (8)$$

имеет $4(2k+1)$ решений. Рассматривая остатки от деления на 3, получаем (квадраты целых чисел при делении на 3 могут давать только остатки 0 и 1), что одно из чисел a, b делится на 3, а другое – нет. Допустим, что $a \equiv 0 \pmod 3$, $b \equiv \pm 1 \pmod 3$. Тогда из четырех пар (a, b), $(a, -b)$, (b, a), $(-b, a)$ ровно одна пара приводит к решению уравнения (7). Следовательно, уравнение (7) имеет в 4 раза меньше решений, чем уравнение (8), т.е. $2k + 1$. Например, при $k = 2$ получается окружность (рис.8; сравните его с рис.7)

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{5^4}{9},$$

или

$$(3x-1)^2 + (3y)^2 = 5^4.$$

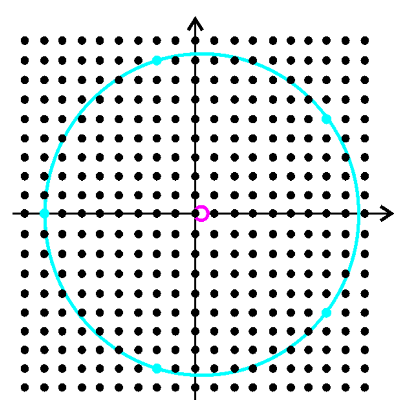


Рис. 8

Теорема 5 полностью доказана.

Окружности, которые задаются уравнениями (3) и (6), называются *окружностями Шинцеля*. Отметим, что для данного числа n эти уравнения могут задавать, вообще говоря, не самую маленькую окружность с n точками решетки на ней. Так происходит, например, при $n = 4$ (очевидно, что можно предъявить окружность радиуса $1/\sqrt{2}$) и при $n = 9$ (окружность Шинцеля имеет радиус 625/3, но окружность с центром $(1/3; 0)$ и радиусом 65/3 также проходит через 9 целых точек).

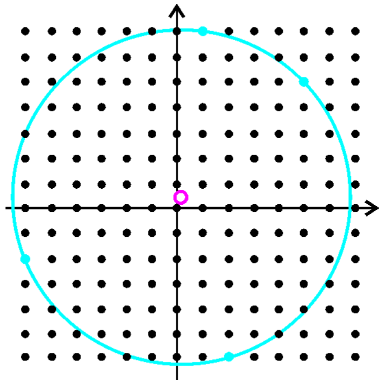


Рис. 9

Возможны более нетривиальные конфигурации точек. Так, на рисунке 9 изображена окружность с центром в точке (1/5; 2/5) и радиусом $\sqrt{13\cdot 17/5}$. Она проходит через четыре целые точки $(-6;\ -2)$, $(1;\ 7)$, $(2;\ -6)$, $(5;\ 5)$. На рисунке 10 можно видеть окружность, проходящую через пять целых точек $(-12;\ -4)$, $(-7;\ 11)$, $(4;\ -12)$, $(10;\ -8)$, $(13;\ 1)$. Ее центр находится в точке (1/7; 2/7), а радиус равен $25\sqrt{13/7}$.

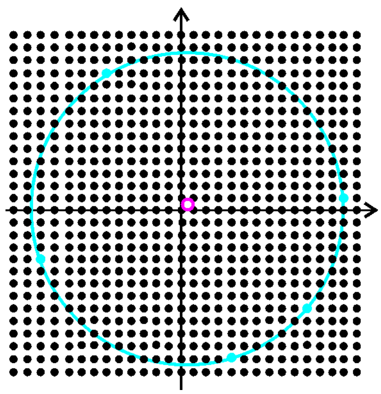


Рис. 10

В связи с этим возникает следующая исследовательская задача: *описать множество окружностей, которые проходят в точности через n точек.*

Предполагается, что окружность, проходящая через четыре точки, – достаточно редкое явление, т.е. если провести окружность через три случайно выбранные точки решетки $\boldsymbol{Z}^2$, то через четвертую целую точку она пройдет с малой вероятностью.

С этой задачей тесно связан и вопрос об изображении круга на экране компьютера. Можно считать, что монитор – это прямоугольный лист клетчатой бумаги, а круг на экране – объединение всех таких клеточек (пикселей), которые пересекаются с внутренностью круга. Задача состоит в том, чтобы выяснить, *сколько различных изображений на экране имеет круг данного радиуса*. На рисунке 11 представлены некоторые возможные изображения круга радиуса 1,05; остальные найдите самостоятельно.

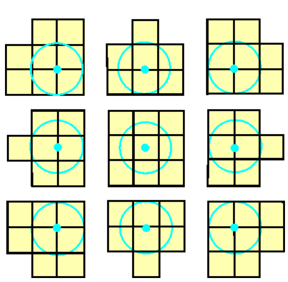


Рис. 11

Этой тематике было посвящено выступление британского математика М. Хаксли на конференции по теории чисел в Москве в 2006 году. Полных ответов на сформулированные вопросы пока нет.

Упражнения

1. Имеется шахматная доска (границы квадратов считаются окрашенными в черный цвет). Начертите на ней окружность наибольшего радиуса, целиком лежащую на черных полях.

2 (Г.Штейнгауз; см. [2]). а) Имеются 64 квадратные плитки со стороной 10. Как их следует уложить на плоскости, чтобы все 64 плитки можно было описать окружностью радиусом 50? Существуют ли окружности меньшего радиуса, способные вместить все 64 плитки? Можно ли поместить 67 плиток внутри этого же круга?

б) Чему равно максимальное число квадратных плиток со стороной 1, которые можно расположить внутри круга радиуса 2?

3. Докажите, что если на окружности с центром (0; 0) лежат только видимые из начала координат узлы решетки $\boldsymbol{Z}^2$, то квадрат ее радиуса не делится ни на один квадрат натурального числа, и обратно.

4. Докажите, что для каждого натурального n существует шар с центром в точке с координатами $\left(\sqrt{2};\ \sqrt{3};\ 1/3\right)$, который содержит внутри себя ровно n узлов решетки $\boldsymbol{Z}^3$.

5 (Т.Куликовский; см. [2]). Пусть $\left(x-x_0\right)^2+y^2=R^2$ – окружность Шинцеля, на которой лежат n точек решетки $\boldsymbol{Z}^2$. Докажите, что на сфере $\left(x-x_0\right)^2+y^2+\left(z-\sqrt{2}\right)^2=R^2+2$ лежат ровно n точек решетки $\boldsymbol{Z}^3$.

6. а) Докажите, что для каждого натурального числа n существует окружность, проходящая ровно через n узлов разбиения плоскости на правильные: а) треугольники; б) шестиугольники.

7 (см. [2]). Докажите, что если по крайней мере одна координата центра окружности иррациональна, то на самой окружности найдется не более двух точек с рациональными координатами.

8 (см. [2]). Докажите следующие утверждения.

а) Существуют окружности с центром в узле решетки $\boldsymbol{Z}^2$, на которых нет ни одной рациональной точки.

б) Существуют окружности, которые содержат ровно одну рациональную точку.

в) Существуют окружности, которые содержат ровно две рациональные точки.

г) Если окружность с центром в начале координат (0; 0) содержит по меньшей мере одну рациональную точку, то на такой окружности лежат бесконечно много рациональных точек плоскости.

9. На листе клетчатой бумаги с клетками размером 1×1 нарисована окружность радиуса R с центром в узле клетки. Докажите, что если на ней лежат ровно 1988 узлов сетки, то либо R, либо $R\sqrt{2}$ – целое число.

10. Докажите, что для любого четного n существует окружность с центром в точке (1/3; 0), которая проходит ровно через n узлов решетки $\boldsymbol{Z}^2$.

Список литературы

[1] Гильберт Д., Кон-Фоссен С. *Наглядная геометрия.* – М.: Наука, 1981.

[2] Серпинский В. *Сто простых, но одновременно и трудных вопросов арифметики.* – М.: Просвещение, 1961.

[3] Штейнгауз Г. *Сто задач.* – М.: Наука, 1976.

Герард Меркатор

А.ВАСИЛЬЕВ

ИЗВЕСТНЫЙ ФЛАМАНДСКИЙ КАРТОГРАФ Герард Кремер (1512–1594) рано овладел латынью и сам себе определил новое имя – Герардус Меркатор. Это имя означает «купец», хотя торговал Меркатор лишь географическими картами собственного изготовления.

Роль Меркатора в географии не уступает роли Коперника в астрономии. И тот и другой противостояли системе Птолемея, хотя один больше интересовался делами земными, а другой – делами небесными.

С 1530 года Меркатор обучался философии в Лёвенском университете, после окончания которого у него развилась стойкая неприязнь именно к философии. Для преодоления этого, как сказали бы сейчас, экзистенциального кризиса Меркатор предпринял целый ряд путешествий по Фландрии и вернулся в Лёвен в 1534 году с тем, чтобы заняться математикой.

Математика интересовала Меркатора прежде всего как инструмент географии и астрономии. Помимо проведения теоретических изысканий, он овладел также искусством гравирования и изготовления математических инструментов.

В 1536 году Меркатор изготовил глобус, который был приобретен императором Карлом V для рассматривания коронных и иных земель. При создании этого глобуса впервые были использованы медные, а не деревянные матрицы, что позволило вложить в него несравненно больший объем информации. Через год после этого Меркатор изготовил также небесный глобус.

Первая карта мира, созданная Меркатором, появилась в 1538 году. Она знаменита тем, что впервые представила Америку как континент, простирающийся практически от полюса до полюса. Вскоре после этого Меркатор выработал стратегию картографирования мира по его отдельным частям. По сути, этой схемы придерживается любой современный атлас, но даже это название – атлас – было впервые использовано Меркатором. Проблема картографирования осложнялась притоком новой информации, что приводило к быстрому устареванию карт. Дополнительные сложности здесь возникали еще и потому, что моряки, двигаясь строго по компасу, полагали, что прокладывают по карте прямой путь. На самом деле, как показал Нуньес, они движутся по румбам, или локсодроме. Осознание этого факта и ознакомление с трудами известного португальца позволили Меркатору существенно улучшить точность производимых им карт. На новом глобусе 1541 года впервые появились румбы.

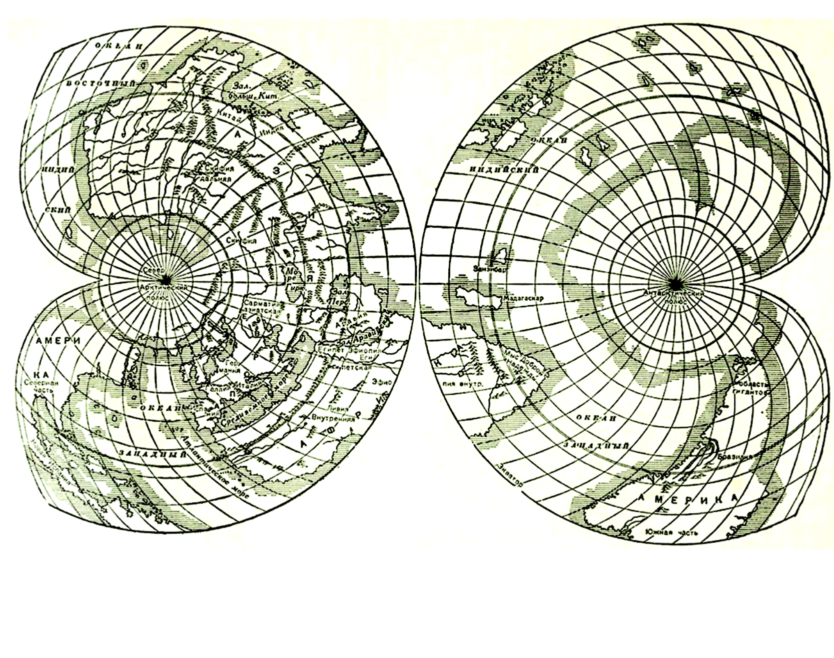
В начале 1544 года Меркатор был арестован по подозрению в ереси, чему немало способствовали его многочисленные путешествия. В некоторых странах даже в наши дни без энтузиазма относятся к путешественникам, а уж в Германии XVI века (где жил тогда Меркатор) лучшего повода для подозрений было не сыскать. Никакого компромата на Меркатора найти не удалось, так что в том же году он вновь обрел свободу.

Новый небесный глобус Меркатора, завершенный в 1551 году, располагал звезды на небе, основываясь уже на коперниковой системе мироздания.

В 1552 году Меркатор переехал в Дуйсбург, где планировалось открытие нового университета и где Меркатор предполагал заняться математикой. Университет, однако, был открыт несколько позже и в настоящее время носит имя Меркатора. В 1564 году Меркатор был назначен придворным космографом при дворе герцога Вильгельма фон Клеве, и в эти же годы он занялся разработкой географической проекции, которая заключалась в том, что все долготы, широты и румбы могли быть представлены на ней в виде прямых линий.

Исправленные и дополненные карты Римской империи Птолемея Меркатор начал издавать с 1578 года. Хотя этот проект и остался незавершенным, Меркатору удалось опубликовать карты Франции, Германии, Нидерландов, Балкан и Греции. Некоторые из изготовленных им карт издавались уже его наследниками.

Меркатор по праву считается одним из основоположников географии, причем его подход к этой науке отличается математической строгостью.



Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 февраля 2007 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №6–2006» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2021» или «Ф2028». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задача М2021 предлагалась на XXVI Уральском турнире юных математиков, задачи М2022 и М2024 предлагались на II Всероссийской олимпиаде по геометрии имени И.Ф.Шарыгина.

Задачи М2021–М2025, Ф2028–Ф2032

М2021. В зале находится компания из n человек, среди которых есть пары знакомых. Известно, что если в зале останется 98 человек, то их всегда можно будет разбить на 49 пар знакомых. Какое наименьшее число пар знакомых могло быть в такой компании, если: а) $n = 99$; б) $n = 100$?

С.Берлов

М2022. Даны окружность, точка A на ней и точка M внутри нее. Рассматриваются хорды BC, проходящие через M. Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон всевозможных треугольников ABC, касаются фиксированной окружности.

В.Протасов

М2023. Пусть a, b, c – отличные от нуля целые числа, сумма которых равна нулю. Докажите, что:
а) $(ab)^5 + (bc)^5 + (ca)^5$ делится на $(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2$;
б) $a^n + b^n + c^n$ делится на $a^4 + b^4 + c^4$ при любом натуральном n, дающем при делении на 3 остаток 1;
в) $(ab)^n + (bc)^n + (ca)^n$ делится на $(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2$ при любом натуральном n, дающем при делении на 3 остаток 2.

В.Произволов, В.Сендеров

М2024. Существует ли выпуклый многоугольник, в котором каждая сторона равна какой-то диагонали, а каждая диагональ равна какой-то стороне?

Б.Френкин

М2025*. Натуральные числа a, b, c, d образуют возрастающую арифметическую прогрессию.
а) Докажите, что для любого нечетного n произведение $abcd$ может оказаться n-й степенью натурального числа.
б) Докажите, что произведение $abcd$ не может быть квадратом натурального числа.

В.Сендеров

Ф2028. Легкий жесткий стержень длиной L с двумя маленькими массивными шариками на концах – масса нижнего шарика M, верхнего m – поставили на шероховатую горизонтальную поверхность под углом α к вертикали и отпустили. При каких значениях коэффициента трения μ между стержнем и столом проскальзывание начнется сразу после того, как мы отпустим стержень? Найдите ускорения шариков сразу после отпускания для конкретного случая: $M = m$, $\alpha = 30°$, $\mu = 0{,}2$.

А.Стержнев

Ф2029. В глубоком космосе летает сосуд, содержащий кислород при температуре 300 К и давлении 1 атм. Непонятно откуда взявшаяся пуля пробивает в стенке сосуда небольшое отверстие, и газ начинает вытекать из сосуда. Рассмотрим момент, когда масса газа в сосуде уменьшилась на 1%. Оцените среднюю кинетическую энергию вылетевших наружу молекул.

Р.Сложнов

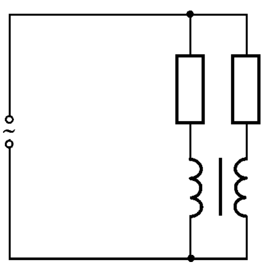
Ф2030. Цикл тепловой машины состоит из двух изотермических участков – сжатия при температуре T и расширения при температуре $3T$, а также двух изобарических участков. Известно, что на участке изотермического расширения газ, а именно гелий, получает вдвое больше тепла, чем на участке изобарического расширения. Определите термодинамический КПД этого цикла.

Р.Простов

Ф2031. Конденсаторы с емкостями 1 мкФ и 2 мкФ соединили последовательно и подключили к источнику напряжения 300 В. После этого источник отключили, а вместо него включили резистор сопротивлением 30 кОм. Одновременно резистор сопротивлением 10 кОм подключили параллельно выводам конденсатора большей емкости. Найдите заряды, протекшие через каждый из резисторов за большое время. Какое количество теплоты выделилось в меньшем из резисторов? Сопротивление проводов мало.

А.Зильберман

Ф2032. Трансформатор (см. рисунок) имеет две одинаковые обмотки, каждая обмотка содержит большое количество витков, тороидальный сердечник трансформатора сделан из материала с большой магнитной проницаемостью. Сопротивления резисторов 1 кОм и 3 кОм, индуктивность одной обмотки 10 Гн. Цепь подключена к источнику переменного напряжения 220 В, 50 Гц. Найдите токи через резисторы.



З.Рафаилов

Решения задач М1996 – М2005, Ф2013 – Ф2017

М1996. *При каких n найдутся такие различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что сумма $a_1/a_2 + a_2/a_3 + \ldots + a_n/a_1$ – целое число?*

Ответ: при $n = 1$ и любом $n \geq 3$.

При $n = 1$ число $\frac{a_1}{a_1} = 1$ – целое.

При $n \geq 3$ положим $a_1 = 1$, $a_2 = n-1$, $a_3 = (n-1)^2, \ldots$ $\ldots, a_n = (n-1)^{n-1}$. Тогда

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} =$$

$$= \frac{1}{n-1} + \frac{n-1}{(n-1)^2} + \ldots + \frac{(n-1)^{n-2}}{(n-1)^{n-1}} + \frac{(n-1)^{n-1}}{1} =$$

$$= (n-1)\cdot\frac{1}{n-1} + (n-1)^{n-1} = 1 + (n-1)^{n-1}$$

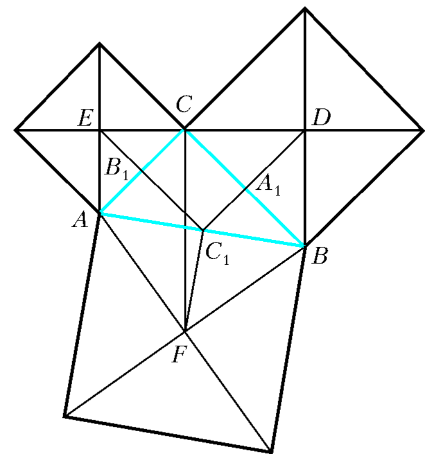
– целое число.

Допустим, $n = 2$, и предположим, что найдутся два таких различных натуральных числа a_1 и a_2, что $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}$ – целое число. Пусть $d = \text{НОД}(a_1, a_2)$, тогда $a_1 = kd$, $a_2 = ld$, где $\text{НОД}(k,l) = 1$. Получаем, что $\frac{kd}{ld} + \frac{ld}{kd} = \frac{k^2 + l^2}{kl}$ – целое, следовательно $k^2 + l^2$ делится на k, а значит, и l^2 делится на k. Но так как $\text{НОД}(k,l) = 1$, то $k = 1$. Аналогично, $l = 1$. Противоречие.

А.Шаповалов

М1997. *На сторонах прямоугольного треугольника ABC площади 1 построены во внешнюю сторону квадраты с центрами D, E, F. Докажите, что площадь треугольника DEF не меньше 2.*

Пусть A_1, B_1, C_1 – середины сторон треугольника ABC, $a = BC$ и $b = AC$ – длины катетов (см. рисунок). Поскольку угол ACB прямой, $CA_1C_1B_1$ – прямоугольник. Центр E квадрата, построенного на AC, лежит на серединном перпендикуляре к AC, т.е. на прямой B_1C_1. Аналогично, D лежит на A_1C_1. Так как $\angle DCA_1 = \angle ECB_1 = 45°$, то D и E лежат на внешней биссектрисе угла ACB. Заметим, что $C_1D = C_1A_1 + A_1D = B_1C + CA_1 = \frac{b}{2} + \frac{a}{2}$, и так же $C_1E = \frac{a+b}{2}$, следовательно, треугольник DEC_1 – равнобедренный прямоугольный с катетами длины $\frac{a+b}{2}$ и гипотенузой $DE = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.



Далее, $\frac{AC}{AE} = \frac{AF}{AC_1} = \sqrt{2}$ и $\angle CAF = \angle CAB + 45° = \angle EAC_1$, значит, треугольник CAF подобен треугольнику EAC_1 с коэффициентом $\sqrt{2}$, откуда $CF = C_1E\sqrt{2} = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$. Из подобия также следует, что угол между CF и EC_1 равен углу между AC и AE, т.е. равен 45°. А так как $\angle C_1ED = 45°$, то $CF \perp DE$.

Итак, площадь треугольника DEF равна

$$S_{DEF} = \frac{1}{2} DE \cdot CF = \frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{\sqrt{2}}\cdot\frac{a+b}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{(a+b)^2}{4} \geq ab = 2S_{ABC}.$$

Замечание. Треугольник DEC_1 (с вершинами в центрах квадратов, построенных на AC и BC, и в середине AB) будет прямоугольным равнобедренным для произвольного треугольника ABC.

П.Кожевников

М1998. *В одной кучке лежат n камней, а в другой – k камней. Каждую минуту автомат выбирает кучку, в которой число камней четное, и половину имеющихся в ней камней перекладывает в другую кучку (если в обеих кучках четное число камней, то автомат выбирает кучку случайным образом). Если в обеих кучках число камней оказалось нечетным, автомат прекращает работу. Сколько существует упорядо-*

ченных пар натуральных чисел (n, k), не превосходящих 1000, для которых автомат через конечное время обязательно остановится?

Ответ: 333396.

Пусть $n = 2^a u$, $k = 2^b v$, где u и v нечетны. Покажем, что автомат обязательно остановится на тех и только тех парах (n, k), для которых $a = b$.

Если $a = b$, то из пары (n, k) автомат может получить либо пару $\left(2^{a-1}u, 2^{a-1}(2v+u)\right)$, либо пару $\left(2^{a-1}(2u+v), 2^{a-1}v\right)$. Поскольку числа $2v + u$ и $2u + v$ нечетны, автомат уменьшил на 1 показатель у степени двойки. Через a ходов этот показатель станет равным нулю, и автомат остановится.

Пусть теперь $a < b$ (случай $a > b$ разбирается аналогично). Если $a \le b-2$, то из пары (n, k) автомат может получить пару $\left(2^a\left(u+2^{b-1-a}v\right), 2^{b-1}v\right)$ с различными показателями степени двойки. Если же $a = b - 1$, то из пары (n, k) автомат может получить пару $\left(2^a(u+v), 2^a u\right) = \left(2^{a+1}\frac{u+v}{2}, 2^a u\right)$, показатели степени двойки в которой снова различны. Понятно, что так автомат может работать до бесконечности.

Остается сделать подсчет. Имеется 500 нечетных чисел, не превосходящих 1000, поэтому количество пар $(n,k) = \left(2^a u, 2^b v\right)$ с $a = b = 0$ равно 500^2; имеется 250 чисел, не превосходящих 1000, делящихся на 2 и не делящихся на 4, поэтому количество пар с $a = b = 1$ равно 250^2. Продолжая так далее, получаем ответ:

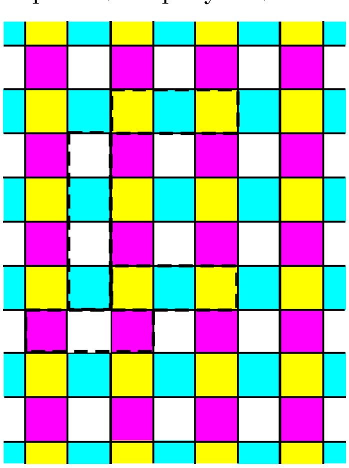
$$500^2 + 250^2 + 125^2 + 63^2 + 31^2 + 16^2 + 8^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2 = 333396.$$

А.Гейн

M1999. *Можно ли расположить на бесконечном клетчатом листе 2005 прямоугольников из трех клеток так, чтобы каждый прямоугольник с двумя другими прямоугольниками имел ровно по одной общей точке, а с остальными прямоугольниками общих точек не имел?*

Ответ: нельзя.

Раскрасим клетки в четыре цвета так, чтобы раскраска самосовмещалась при сдвиге на две клетки вверх или вправо (см. рисунок). В любом прямоугольнике две



крайние клетки имеют один и тот же цвет; присвоим прямоугольнику этот цвет. Два прямоугольника назовем *соседней парой*, если они имеют общую точку (вершину). Нетрудно видеть, что соседнюю пару могут образовать только красный и синий прямоугольники (красно-синяя пара) или желтый и белый прямоугольники (желто-белая пара). Предположим, что условие задачи выполняется и каждый прямоугольник входит в две соседние пары. Каждый красный прямоугольник входит в две соседние красно-синие пары, тогда общее количество красно-синих соседних пар вдвое больше количества красных прямоугольников. Аналогично, это количество вдвое больше количества синих прямоугольников, следовательно, красных и синих прямоугольников поровну, и их суммарное количество четно. Так же, суммарное количество желтых и белых прямоугольников четно. Но всего имеется 2005 прямоугольников – нечетное число. Противоречие.

К.Кноп, С.Берлов

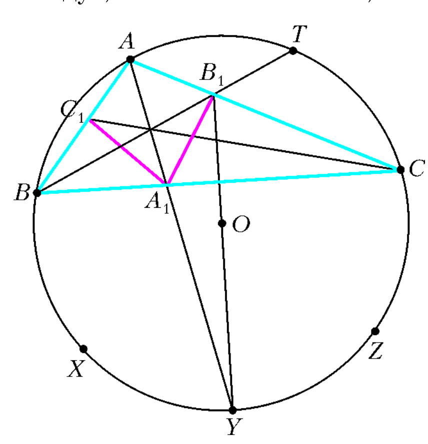
M2000. *Есть n мудрецов и неограниченный запас колпаков каждого из n различных цветов. Мудрецы одновременно закрывают глаза, и каждому из них надевают на голову какой-то колпак (например, все надетые колпаки могут оказаться одного цвета). Мудрецы открывают глаза. Каждый видит, какие колпаки надеты на остальных, но не видит своего. После этого каждый мудрец пытается угадать, какого цвета его колпак, записав свою гипотезу на бумажке втайне от остальных. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться о совместных действиях таким образом, чтобы в любом случае хотя бы один из них угадал цвет своего колпака.*

Занумеруем цвета и мудрецов числами $0, 1, \ldots, n-1$. Пусть S – сумма номеров цветов колпаков на головах мудрецов. Если знать цвета всех колпаков, кроме одного, и остаток от деления S на n, можно однозначно определить цвет неизвестного колпака. Пусть i-й мудрец назовет предполагаемый цвет своего колпака исходя из того, что остаток от деления S на n равен i ($i = 0, 1, \ldots, n-1$). Ясно, что в любом случае один (и только один) из мудрецов угадает.

Жюри IX Кубка памяти А.Н.Колмогорова

M2001. *Дан треугольник ABC, в котором проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. Известно, что величины углов A, B и C относятся как 4:2:1. Докажите, что $A_1B_1 = A_1C_1$.*

Опишем вокруг треугольника ABC окружность с центром O (см. рисунок). По условию величины дуг BC, CA, AB относятся как 4:2:1, поэтому, разделив окружность на 7 равных дуг, начиная с точки A, мы получим вписанный в окружность правильный семиугольник $ABXYZCT$.



Так как AA_1 – биссектриса угла BAC, то она проходит через точку Y – середину дуги BC. Аналогично, BB_1 проходит через точку T – середину дуги AC. Хорды AC и TB пересекаются в B_1 и симметричны относительно оси OY, значит, B_1 лежит на OY, следовательно,

$$\angle AYB_1 = \frac{\angle AYT}{2} = \frac{\cup AT}{4} = \frac{\cup AB}{4} = \frac{\angle ACB}{2} = \angle BCC_1.$$

Хорды BC и AY пересекаются в A_1 и симметричны относительно оси OZ, поэтому $AA_1 = A_1B$, $A_1C = A_1Y$. Далее, $\angle ABC = \frac{\cup AC}{2} = \frac{\cup CY}{2} = \angle YAC$. Из доказанного следует, что существует поворот вокруг точки A_1, при котором точка B перейдет в точку A. При выполнении этого поворота точка C переходит в точку Y, угол BCC_1 – в угол AYB_1, а угол CBA – в угол YAC. Следовательно, точка пересечения прямых BA и CC_1 (точка C_1) перейдет в точку пересечения прямых AC и YB_1 (точку B_1). Но тогда отрезок A_1C_1 перейдет в отрезок A_1B_1, и эти отрезки равны.

С.Токарев

Замечание. Эта задача связана со следующим вопросом: верно ли, что треугольник равнобедренный, если треугольник с вершинами в основаниях его биссектрис равнобедренный? То, что ответ на этот вопрос неожиданно оказывается отрицательным, известно достаточно давно, однако вызывала интерес возможность построить пример треугольника с явными величинами углов (см. статью И.Шарыгина «Вокруг биссектрисы» в Приложении к журналу «Квант» №1 за 1998 г.). Треугольник ABC из данной задачи является, вероятно, первым таким примером.

М2002*. *Пусть a, b, c – положительные числа, сумма которых равна 1. Докажите, что*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{25}{1 + 48abc}.$$

Без ограничения общности будем считать, что $a \leq b \leq c$. Пусть $a < b$. Положим $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$. Раскрывая скобки и учитывая, что $a + b + c = 1$, получаем $P(x) = x^3 - x^2 + px - q$, где $p = ab + bc + ca$, $q = abc$. Данное неравенство переписывается в виде $p \geq \frac{25q}{1+48q}$.

Зафиксируем p. Поскольку $\frac{25q}{1+48q} = \frac{25}{\frac{1}{q}+48}$, правая часть неравенства растет с ростом q.

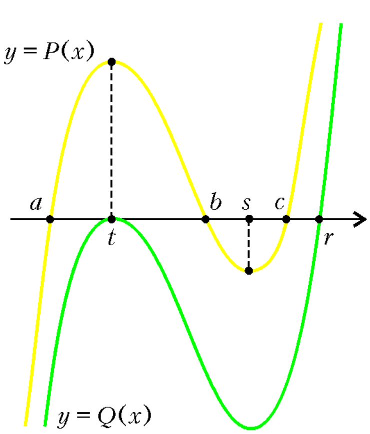


График $y = P(x)$ (см. рисунок) имеет два локальных экстремума (это корни производной $P'(x)$): локальный максимум в точке t, $a < t < b$, и локальный минимум в точке s, $b \leq s \leq c$. Рассмотрим многочлен $Q(x) = P(x) - P(t) = x^3 - x^2 + px - (q + P(t))$.

График $Q(x)$ получается из графика $P(x)$ сдвигом вниз на $P(t)$, поэтому $Q(x)$ имеет двукратный корень в точке t и третий корень в некоторой точке $r > c$: $Q(x) = (x-t)(x-t)(x-r)$. Тройка чисел t, t, r имеет сумму 1 и сумму попарных произведений p, как и тройка a, b, c, а произведение $ttr = q + P(t)$ больше, чем $q = abc$. Значит, если неравенство верно для тройки t, t, r, то оно верно и для тройки a, b, c.

Таким образом, при решении задачи достаточно считать, что $a = b \leq c$. Поскольку $c = 1 - 2a$, неравенство преобразуется к виду

$$\left(1 + 48a^2(1-2a)\right)\left(a + 2(1-2a)\right) - 25a(1-2a) \geq 0.$$

Заметим, что левая часть обращается в ноль при $a = \frac{1}{3}$, причем $\frac{1}{3}$ – двукратный корень. Вынеся за скобки $(3a-1)^2$, мы приходим к верному неравенству $(3a-1)^2(4a-1)^2 \geq 0$.

Из решения видно, что равенство достигается не только в случае, когда все переменные равны $\frac{1}{3}$, но и когда две переменные равны $\frac{1}{4}$, а третья равна $\frac{1}{2}$.

Задача сводится к случаю $a = b \leq c$ и по-другому. Исходное неравенство можно переписать в виде $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 48(ab + bc + ca) \geq 25$ и доказать, что при $0 < a \leq b \leq c$ выполнено $f(a,b,c) \geq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right)$, где $f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 48(xy + yz + zx)$.

Я.Алиев, В.Сендеров

М2003*. *а) Докажите, что при любых натуральных a, b, c, n уравнение*

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^n$$

разрешимо в натуральных числах x, y, z.

б) Докажите, что при любом нечетном $n \geq 3$ и любых натуральных a, b, c уравнение

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = t^n$$

разрешимо в натуральных числах x, y, z, t.

в) Докажите, что найдутся такие натуральные a, b, c, что уравнение

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = t^2$$

неразрешимо в натуральных числах x, y, z, t.

а) При $n = 1$ имеется решение $x = a$, $y = b$, $z = c$. Пусть $n = 2$. В очевидном тождестве $(d+e)^2 = (d-e)^2 + 4de$ положим $d = a^2 + b^2$, $e = c^2$; получим $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 = \left(a^2+b^2-c^2\right)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2$. Без ограничения общности считая $a \geq b \geq c$, получаем в правой части сумму трех натуральных квадратов.

Теперь достаточно осуществить переход от n к $n + 2$. Положим $m = a^2 + b^2 + c^2$. Если тройка (x,y,z) –

решение уравнения $x^2+y^2+z^2=m^n$, то (mx,my,mz) – решение уравнения $x^2+y^2+z^2=m^{n+2}$.

б) При $n=2k+1$ достаточно положить $x=y=z==(a+b+c)^k$, $t=a+b+c$.

в) Докажем, что уравнение

$$3x^2+3y^2+2z^2=t^2 \qquad (1)$$

не имеет решений в натуральных числах. Предположим противное, и пусть t – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее (1) для некоторых натуральных x, y, z. Если z не делится на 3, то z^2 дает остаток 1 при делении на 3, следовательно, t^2 дает остаток 2 при делении на 3, что невозможно. Если z делится на 3, то t делится на 3, и x^2+y^2 делится на 3. Отсюда $x\vdots 3$, $y\vdots 3$, и четверка $\left(\frac{x}{3},\frac{y}{3},\frac{z}{3},\frac{t}{3}\right)$ – решение (1) в натуральных числах. Противоречие выбору t.

Замечания

Рассуждения пункта а) проходят также для суммы четырех и более квадратов. Для суммы двух квадратов утверждение, аналогичное а), неверно: $\left(1^2+1^2\right)^2\ne x^2+y^2$ для натуральных x, y. Заметим, что произведение двух чисел, представимых в виде суммы трех натуральных квадратов, не всегда можно представить в том же виде: $\left(1^2+1^2+1^2\right)\left(1^2+2^2+4^2\right)=63==8k+7\ne x^2+y^2+z^2$ при целых x, y, z.

Отметим также, что полученные в решении а) представления степеней не единственны: $\left(1^2+1^2++1^2\right)^3=3^2+3^3+3^2=1^2+1^2+5^2$, второе из этих представлений соответствует тождеству

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^3=\left(\left(3a^2+3b^2-c^2\right)c\right)^2+$$
$$+\left(\left(a^2+b^2-3c^2\right)a\right)^2+\left(\left(a^2+b^2-3c^2\right)b\right)^2.$$

В пункте в) в качестве примера можно взять уравнение вида $px^2+py^2+cz^2=t^2$, где p – простое число вида $4k+3$ (для таких p из делимости $\left(x^2+y^2\right)\vdots p$ следует $x\vdots p$, $y\vdots p$; по этому поводу см., например, статью А.Спивака и В.Сендерова «Суммы квадратов и целые гауссовы числа» в «Кванте» № 3 за 1999 г.), а c – такое, что из делимости $\left(cz^2-t^2\right)\vdots p$ следует $z\vdots p$, $t\vdots p$. Например, взяв $p=7$, можно положить $c=3$, 5 или 6.

Наметим еще один способ решения в). Возьмем произвольное число d вида

$$(8m+7)\cdot 4^l, \qquad (2)$$

где m и l – целые неотрицательные числа, и положим $a=b=c=d$. Домножив обе части уравнения на d, получим равенство $X^2+Y^2+Z^2=dt^2$, где $X=dx$, $Y=dy$, $Z=dz$. Вместе с числом d и число dt^2 имеет вид (2), а такие числа, как легко показать, не представимы в виде суммы трех квадратов целых чисел (или, сильнее: суммой четырех квадратов целых неотрицательных чисел, хотя бы одно из которых меньше 2^{l-1}). Гаусс доказал (это очень сложная теорема), что всякое натуральное число, не имеющее вида (2), представимо в виде суммы квадратов трех целых чисел.

В другом направлении развивает теорию разложений А.Гурвиц: он рассматривает натуральное число, a priori являющееся точным квадратом, и устанавливает условия, при которых оно представимо в виде суммы квадратов трех натуральных чисел.

Теорема (А.Гурвиц). *Единственными натуральными числами k, для которых уравнение $x^2+y^2+z^2=k^2$ не имеет решений в натуральных числах x, y, z, являются числа $k=2^h$ и $k=5\cdot 2^h$, где $h=0, 1, 2, \ldots$*

Ясно, что для случая $n=2$ утверждение пункта а) является следствием теоремы Гурвица. В самом деле, числа вида 2^h и $5\cdot 2^h$, где $h=0, 1, 2, \ldots$, не представимы в виде суммы квадратов трех натуральных чисел (это легко доказать методом спуска).

Однако доказательство теоремы Гурвица довольно сложное.

А.Авакян, В.Сендеров

М2004. *У Карлсона имеется 1000 банок с вареньем. Банки не обязательно одинаковые, но в каждой не больше чем 1/100 часть всего варенья. На завтрак Карлсон может съедать поровну варенья из любых 100 банок. Докажите, что Карлсон может действовать так, чтобы за некоторое количество завтраков съесть все варенье.*

Заменим в условии задачи 100 и $\frac{1}{100}$ соответственно на n и $\frac{1}{n}$, $n\le 100$, и назовем это задачей-n (общее количество банок неважно, главное, что их не меньше 100). Применим индукцию по n. Задача-1 очевидна. Предположим, что у Карлсона есть алгоритм действий для решения задачи-$(n-1)$. Объясним, как ему тогда действовать в случае задачи-n.

Пусть A – наибольшая по количеству варенья банка, а B – группа оставшихся банок. По условию в банке A не больше $\frac{1}{n}$ от общего количества варенья. Пусть в ней строго меньше $\frac{1}{n}$ от общего количества варенья. Вначале добьемся, чтобы в банке A было ровно $\frac{1}{n}$ от общего количества варенья следующим образом. Непустых банок не может быть меньше $n+1$. Пусть Карлсон из группы B выберет n наименьших непустых банок и будет съедать из них по некоторому одинаковому количеству варенья. Доля варенья в самой большой банке при этом будет расти. Либо Карлсон доводит эту долю до $\frac{1}{n}$, либо раньше этого он опустошает самую маленькую банку, уменьшая количество непустых банок. Во втором случае пусть Карлсон снова выберет n наименьших непустых банок и т.д. Через несколько шагов в банке A будет ровно $\frac{1}{n}$ от общего количества варенья.

Далее, заметим, что для группы B выполняется условие задачи-$(n-1)$: в них вместе содержится $\frac{n-1}{n}$ от всего варенья, и в каждой из них по условию не более

$\frac{1}{n}$ всего варенья, т.е. не более $\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n-1}=\frac{1}{n-1}$ от количества варенья во всех банках группы B. Поэтому Карлсон может применять алгоритм задачи-$(n-1)$ для группы B, съедая на каждом шаге поровну варенья из некоторых $n-1$ банок группы B, и одновременно съедать столько же варенья из банки A. Ясно, что варенье кончится во всех банках одновременно.

А.Николаев

М2005*. *Докажите, что выпуклый многогранник с n вершинами нельзя разрезать менее чем на n − 3 тетраэдра.*

Предположим противное и допустим, что t – минимальное число тетраэдров, на которое можно разрезать какой-то многогранник с нарушением утверждения задачи. Пусть некоторый многогранник M с n вершинами, m ребрами и k гранями разрезан на $t<n-3$ тетраэдров.

Заметим, что некоторые грани некоторых тетраэдров разбиения выходят на поверхность многогранника и дают ее разбиение на треугольники. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_k$ – количества вершин (или ребер) в гранях. Рассмотрим некоторую грань с v_i вершинами. Она разбита на треугольники, при этом каждый треугольник разбиения имеет сумму углов π, а сумма углов у вершин этой грани равна $(v_i-2)\pi$, значит, грань должна быть разрезана на v_i-2 или более треугольников. Суммарное количество треугольников на поверхности не менее $(v_1+v_2+\ldots+v_k)-2k$. Так как каждое ребро принадлежит двум граням, то $v_1+v_2+\ldots+v_k=2m$. Из формулы Эйлера ($n-m+k=2$) вытекает, что количество треугольников не менее $2n-4>2(n-3)$. Отсюда следует, что все тетраэдры разбиения не могут выходить на поверхность двумя или менее гранями. Если один из тетраэдров разбиения выходит на поверхность всеми четырьмя гранями, то M – тетраэдр, но для него утверждение задачи верно. Значит, один из тетраэдров разбиения выходит на поверхность ровно тремя гранями, но такой тетраэдр можно отрезать от M, потеряв один тетраэдр и не более одной вершины. Полученный после отрезания тетраэдра многогранник не удовлетворяет условию задачи и разбит на $t-1$ тетраэдр. Это противоречит выбору t.

Р.Карасев

Ф2013. *На горизонтальной плоскости сидит лягушка. Навстречу ей издалека катится барабан радиусом R. Центр барабана движется со скоростью v. С какой наименьшей скоростью должна подпрыгнуть лягушка, чтобы перепрыгнуть барабан, слегка коснувшись его только в верхней точке? Размерами лягушки можно пренебречь.*

В движущейся системе отсчета, связанной с центром равномерно катящегося барабана, лягушка после прыжка будет двигаться по параболе. Направим ось X в этой системе по горизонтали вдоль плоскости в направлении от лягушки к барабану, ось Y направим вертикально вверх, начало отсчета выберем в том месте, где сидела лягушка, и будем отсчитывать время от момента прыжка. Если лягушка в неподвижной системе отсчета прыгает под углом α к горизонту со скоростью v_0, имеющей горизонтальную составляющую v_{0x} и вертикальную составляющую v_{0y}, то зависимость координат лягушки от времени t в движущейся системе координат будет иметь вид

$$x=(v_{0x}+v)t,\quad y=v_{0y}t-\frac{gt^2}{2}.$$

Максимальная высота подъема, очевидно, равна $y_1=\frac{v_{0y}^2}{2g}$ и должна совпадать с удвоенным радиусом цилиндра, откуда получаем

$$v_{0y}^2=4gR.$$

Максимальная высота достигается в момент времени $t_1=\frac{v_{0y}}{g}$ в точке с горизонтальной координатой

$$x_1=(v_{0x}+v)t_1=\frac{v_{0y}(v_{0x}+v)}{g}.$$

Выразив время из зависимости $x(t)$ и подставив его в зависимость $y(t)$, получим уравнение траектории движения лягушки:

$$y=\frac{v_{0y}x}{v_{0x}+v}-\frac{gx^2}{2(v_{0x}+v)^2}=y_1-\frac{g(x-x_1)^2}{2(v_{0x}+v)^2}.$$

Вблизи верхней точки параболы с координатами (x_1, y_1) это уравнение должно совпадать с уравнением окружности радиусом R с центром в точке с координатами (x_1, R):

$$y_1-\frac{g(x-x_1)^2}{2(v_{0x}+v)^2}=R+\sqrt{R^2-(x-x_1)^2}\approx 2R-\frac{(x-x_1)^2}{2R}.$$

Отсюда получаем

$$(v_{0x}+v)^2=gR,\text{ и } v_{0x}=\sqrt{gR}-v.$$

Таким образом, скорость лягушки в неподвижной системе отсчета равна

$$v_0=\sqrt{v_{0y}^2+v_{0x}^2}=\sqrt{4gR+\left(\sqrt{gR}-v\right)^2}=$$
$$=\sqrt{5gR+v^2-2v\sqrt{gR}}$$

и направлена под углом α к горизонту таким, что

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{v_{0y}}{v_{0x}}=\frac{2\sqrt{gR}}{\sqrt{gR}-v}.$$

Отметим, что при $v<\sqrt{gR}$ лягушка должна прыгать навстречу катящемуся барабану, а при $v\ge\sqrt{gR}$ – вертикально вверх.

Замечание. Задачу можно решить проще, воспользовавшись понятием радиуса кривизны траектории. Действительно, в движущейся системе отсчета радиус кривизны $R_{кр}$ траектории лягушки в верхней точке должен превышать R (траектория касается барабана), а ускорение лягушки имеет только нормальную составляющую, равную g. Отсюда получаем

$$R_{кр}=\frac{(v_{0x}+v)^2}{g}\ge R,\text{ т.е. } v_{0x}\ge\sqrt{gR}-v.$$

Вертикальная составляющая скорости лягушки, очевидно, должна быть такой, чтобы она могла перепрыгнуть барабан высотой $2R$, т.е.

$$v_{0y} = \sqrt{2g \cdot 2R} = 2\sqrt{gR} .$$

Отсюда сразу следует ответ.

М.Ромашка

Ф2014. *В системе, изображенной на рисунке 1, массы всех трех грузов одинаковы и равны m. Нить, соединяющая грузы 1 и 2, невесома и нерастяжима; ее участки, не лежащие на блоках, вертикальны или горизонтальны; блоки невесомы; трения нет. Груз 3 движется по горизонтальной плоскости не опрокидываясь. Найдите ускорения всех трех грузов. Ускорение свободного падения равно g.*

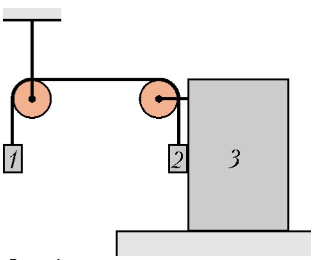


Рис. 1

При условиях задачи сила натяжения нити везде одинакова и равна T. Груз *1* будет двигаться по вертикали с ускорением a_1, груз *3* – по горизонтали с ускорением a_3, груз *2* – по вертикали с ускорением a_{2y} и вместе с грузом *3* по горизонтали с ускорением $a_{2x} = a_3$. Введем систему координат, как показано на рисунке 2, и запишем уравнения движения грузов в проекциях на оси X и Y:

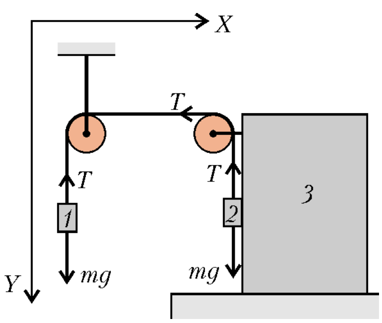


Рис. 2

$$ma_1 = mg - T ,$$

$$ma_{2y} = mg - T ,$$

$$2ma_{2x} = -T .$$

При написании последнего уравнения было учтено, что силы давления грузов *2* и *3* друг на друга – внутренние силы для системы этих грузов, так что грузы движутся только под действием силы натяжения нити T.

Из условия нерастяжимости нити $y_1 + y_2 + x_2 = \mathrm{const}$ следует уравнение кинематической связи:

$$a_1 + a_{2y} + a_{2x} = 0 .$$

Из первых двух уравнений движения грузов следует, что $a_1 = a_{2y} = g - \frac{T}{m}$, а из третьего – что $a_{2x} = -\frac{T}{2m}$. Подставляя эти выражения в уравнение кинематической связи, получаем

$$g - \frac{T}{m} + g - \frac{T}{m} - \frac{T}{2m} = 0 \text{, или } T = \frac{4}{5}mg .$$

Тогда

$$a_1 = a_{2y} = \frac{g}{5} ,\ a_{2x} = a_3 = -\frac{2}{5}g ,\ a_2 = \sqrt{a_{2x}^2 + a_{2y}^2} = \frac{g}{\sqrt{5}} .$$

При этом вектор ускорения первого груза направлен вертикально вниз, вектор ускорения второго груза направлен вниз под углом $\varphi = \operatorname{arctg}\left|\frac{a_{2y}}{a_{2x}}\right| = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ к горизонту, вектор ускорения третьего груза направлен по горизонтали влево.

М.Семенов

Ф2015. *Найдите сопротивление между клеммами A и B цепи, изображенной на рисунке 1 и состоящей из бесконечного числа одинаковых резисторов с сопротивлением R каждый.*

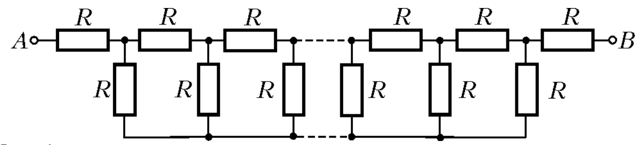


Рис. 1

Ясно, что на большом удалении от клемм A и B данной цепи ток течет только по нижнему проводнику, а по верхней части ток не идет, и поэтому ее можно разорвать. Тогда изображенную на рисунке 1 цепь можно представить как совокупность двух электрических цепей AC и CB, соединенных последовательно (рис.2).

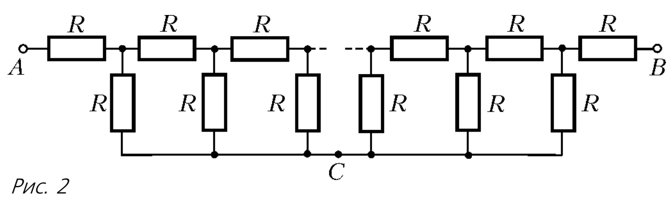


Рис. 2

Сопротивление R_{AB} всей электрической цепи складывается из сопротивлений R_{AC} и R_{CB} цепей AC и CB, которые совпадают:

$$R_{AC} = R_{CB} = R_x .$$

Поэтому

$$R_{AB} = 2R_x .$$

Теперь перерисуем цепь AC так, как изображено на рисунке 3. Поскольку эта цепь бесконечная и ее сопротивление не изменяется при добавлении еще одного звена в начале, представим ее соответственно рисунку 4. Тогда из законов последовательного и параллельного соединений проводников получим

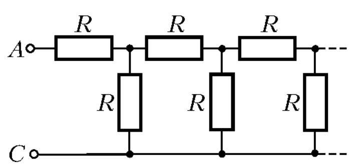


Рис. 3

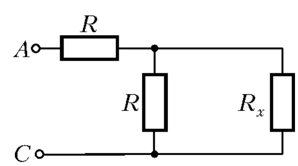


Рис. 4

$$R_x = R + \frac{RR_x}{R + R_x} ,$$

или

$$R_x^2 - RR_x - R^2 = 0 .$$

Решая это квадратное уравнение, находим

$$R_x = R\frac{1+\sqrt{5}}{2} .$$

Отсюда окончательно получаем

$$R_{AB} = R\left(1+\sqrt{5}\right).$$

Д.Харабадзе

Ф2016. *Во всех точках кривой A, изображенной на рисунке 1, потенциал электрического поля, созданного неподвижными точечными зарядами $q_1 = 4$ нКл и $q_2 = 1$ нКл, равен $\varphi = 900$ В. Определите расстояние l между зарядами. Постоянная в законе Кулона $k = 9\cdot 10^9$ Н·м²/Кл².*

Электрическое поле в рассматриваемом случае симметрично относительно оси, проходящей через заряды q_1 и q_2. При вращении кривой A относительно этой оси получим замкнутую поверхность, потенциал во всех точках которой один и тот же. Такие поверхности называют эквипотенциальными. Вектор напряженности $\vec{E}$ (если он отличен от нуля) в любой точке эквипотенциальной поверхности направлен перпендикулярно к ней. Только в этом случае электрическое поле не совершает работы при переносе пробного заряда из одной точки эквипотенциальной поверхности в любую другую точку этой поверхности.

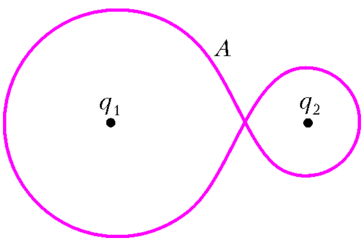


Рис. 1

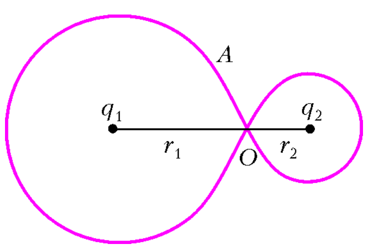


Рис. 2

Заметим, что в точке O (рис.2), где самопересекается кривая A, направление нормали к эквипотенциальной поверхности, а следовательно, и направление вектора $\vec{E}$ не определены. Это возможно только в том случае, когда напряженность в этой точке равна нулю. Поэтому можем записать

$$\frac{kq_1}{r_1^2} = \frac{kq_2}{r_2^2},$$

где r_1 и r_2 – расстояния от точки O до зарядов q_1 и q_2 соответственно. Запишем также выражение для потенциала в точке O:

$$\varphi = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2}.$$

Кроме того, воспользуемся тем, что

$$r_1 + r_2 = l.$$

Из этих уравнений находим

$$l = \frac{k\left(\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}\right)^2}{\varphi} = 9 \text{ см}.$$

И.Горбатый

Ф2017. *В воду с показателем преломления $n_\text{в}$ частично погружена тонкая стеклянная плосковыпуклая линза, причем ее плоская сторона горизонтальна и находится под водой, а толщина линзы H (рис.1). На эту систему вертикально падает параллельный пучок света. На глубинах l и L > l в воде возникают два одинаково ярких изображения. Каковы радиус R выпуклой поверхности линзы, показатель преломления n материала линзы и глубина h ее погружения в воду? Отражением света от воды и от линзы, а также поглощением света пренебречь.*

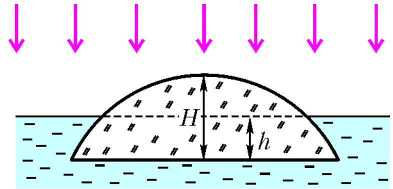


Рис. 1

Изображения формируются следующим образом. Часть светового пучка попадает на выпуклую поверхность линзы в воздухе, преломляется на ней, затем преломляется на плоской поверхности линзы в воде и образует одно изображение на глубине l. Другая часть пучка попадает на линзу в воде и образует после преломлений второе изображение на глубине $L > l$.

Выразим расстояния до изображений l и L через радиус R выпуклой поверхности линзы и показатели преломления воды $n_\text{в}$ и материала линзы n. Для этого рассмотрим луч света, проходящий на расстоянии $x \ll R$ от главной оптической оси линзы и попадающий на нее из воздуха (рис.2). Он падает на

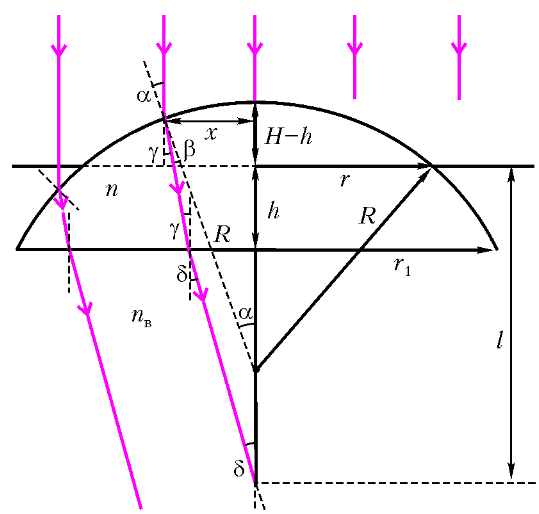


Рис. 2

сферическую поверхность линзы под углом $\alpha = \dfrac{x}{R}$ и преломляется под углом $\beta = \dfrac{x}{Rn}$, поворачивая при этом на угол $\gamma = \alpha - \beta = \dfrac{x}{R}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$. Под этим же углом он падает на плоскую поверхность линзы и преломляется под углом $\delta = \gamma\dfrac{n}{n_\text{в}} = \dfrac{x}{R}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{n}{n_\text{в}}$, выходя в воду. Поскольку по условию линза тонкая, то $\delta = \dfrac{x}{l}$, и расстояние l до изображения можно определить из соотношения

$$\frac{x}{l}=\frac{x}{R}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{n}{n_{\text{в}}},$$

откуда

$$l=\frac{Rn_{\text{в}}}{n-1}.$$

Аналогичным образом, рассматривая часть пучка, падающую на линзу в воде, находим расстояние до второго изображения:

$$L=\frac{R}{(n/n_{\text{в}})-1}=\frac{Rn_{\text{в}}}{n-n_{\text{в}}}$$

(это формула получается заменой в выражении для l показателя преломления воздуха, равного 1, на показатель преломления воды $n_{\text{в}}$).

Из полученных соотношений находим

$$R=\frac{lL(n_{\text{в}}-1)}{n_{\text{в}}(L-l)} \text{ и } n=\frac{n_{\text{в}}L-l}{L-l}.$$

Осталось найти глубину h погружения линзы в воду. Поскольку изображения оказываются одинаково яркими, то части пучка, падающие на линзу в воздухе и воде, переносят одинаковую энергию. Поэтому площади горизонтальных оснований частей линзы, покрытых и не покрытых водой, должны совпадать, т.е. площадь основания выступающей из воды части линзы составляет $1/2$ от площади основания всей линзы. Найдем связь высоты $H-h$ выступающей из воды части линзы с радиусом r ее основания (см. рис.2). По теореме Пифагора, с учетом малости H по сравнению с R, имеем

$$r^2=R^2-(R-(H-h))^2=2R(H-h),$$

откуда площадь основания выступающей из воды части линзы равна

$$S_1=\pi r^2=2\pi R(H-h).$$

Аналогично, площадь основания всей линзы составляет

$$S=\pi r_1^2=2\pi RH.$$

Поскольку $S_1=S/2$, получаем

$$h=\frac{H}{2}.$$

С.Варламов, М.Семенов

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

История с «Головоломкой столяра»

(Начало см. на 2-й с. обложки)

В истории головоломок немало случаев, когда классические, давно придуманные задачи, попадая к пытливому исследователю, вдруг раскрывают свои новые стороны, получают красивые решения и рождают серию других оригинальных задач.

В 1821 году учитель из Лондона Джон Джексон в брошюре «Полезные занятия в зимние вечера» опубликовал такую задачу:

Как разрезать круг, чтобы из его частей сложить два овала с отверстиями в середине?

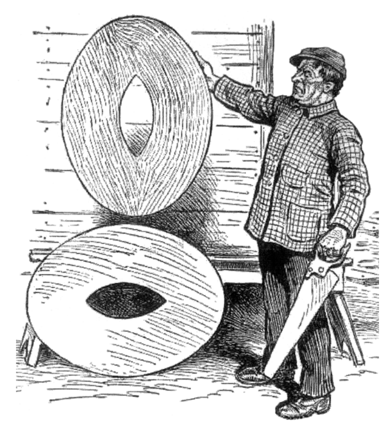
Сам Джексон считал, что круг надо разделить минимум на восемь частей.

Прошло ровно 80 лет, и знаменитый изобретатель головоломок Сэм Лойд предложил американским читателям поломать голову над аналогичной задачей. В 1914 году в «Энциклопедии 5000 головоломок, фокусов и задач» Сэма Лойда эта проблема была опубликована под названием «Головоломка столяра»:

Столяр получил заказ на изготовление круглого дубового стола. На складе у него был дубовый пень подходящего размера, но с гнилой сердцевиной. Как составить круглую столешницу из частей двух овалов, разрезав их на минимальное число деталей?

В «Энциклопедии» было приведено решение с разрезанием овалов на шесть частей.

После этого «Головоломку столяра» перепечатывали сотни, если не тысячи раз по всему свету. И всегда считалось, что решение, напечатанное в книге Лойда, – наилучшее. Но в 2004 году новый подход к старой задаче нашел украинский изобретатель Сергей Грабарчук – автор занимательных математических книг и задач, известных любителям головоломок во всем мире. Он сумел разрезать показанные в книге Лойда овалы на пять частей – один овал на две, а второй на три части – и сложить из них круг. Причем сделал это несколькими способами.



Предлагаем вам найти одно из решений Грабарчука или свое собственное, оригинальное решение. Сергей доказал, что разрезать овалы на пять частей и сложить из них круг можно бесчисленным количеством способов.

Чтобы облегчить разгадку, на обложке журнала показано «зашифрованное» решение Грабарчука. На нем проведено слишком много линий. Вам нужно использовать лишь некоторые из них, делящие два овала на пять деталей, и сложить из них круг.

Удачи вам!

А.Калинин

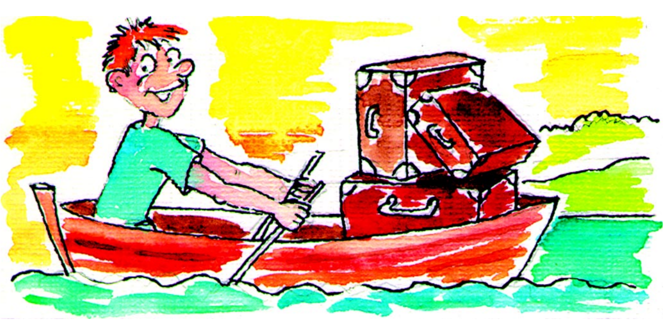
Задачи

1. У распорядителя банкета есть некоторое количество одинаковых квадратных столов. Их можно расставить либо буквой «Н», либо буквой «Г» («толщина» каждой буквы – один стол). В каком случае можно будет рассадить больше гостей (периметр образовавшегося банкетного стола будет больше)?

А.Блинков

2. Три жулика, каждый с двумя чемоданами, находятся на одном берегу реки, через которую они хотят переправиться. Есть трехместная лодка, каждое место в ней может быть занято либо человеком, либо чемоданом. Никто из жуликов не доверит свой чемодан спутникам в свое отсутствие, но готов оставить чемоданы на безлюдном берегу. Смогут ли они переправиться?

А.Шаповалов



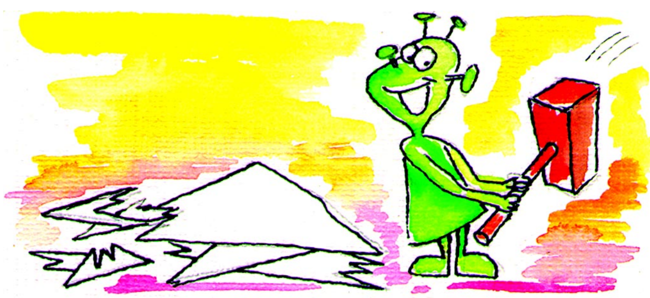
3. В 2006 году в «Кванте» №4 в «Задачнике «Кванта» по математике появилась задача под номером М2006. Если бы журнал выходил ежемесячно и в каждом его выпуске публиковалось по 5 задач по математике, как это было в первые годы издания журнала, то «юбилейная» задача М2003 появилась бы уже в 2003 году. Но начиная с января некоторого года журнал стал выходить 6 раз в год, причем в тот год было опубликовано 30 задач, два последующих года публиковалось по 60 задач, а затем в каждых двух соседних номерах журнала в «Задачнике» в общей

сложности публикуется 15 задач по математике. Начиная с какого года журнал стал выходить 6 раз в год?

А.Виленкин

4. При каких N можно любой треугольник разбить на N треугольников, имеющих по равной медиане?

А.Шаповалов



5. Каждому из трех логиков написали на лбу натуральное число, причем одно из этих чисел являлось суммой двух других, о чем им сообщили. Логик не видит, что написано у него на лбу, но видит, что написано у других. Первый логик сказал, что не может догадаться, какое число написано у него на лбу. После этого то же самое сказал второй логик, а затем и третий. Тогда первый сказал: «Я знаю, что у меня на лбу написано число 50». Какие числа написаны у двух остальных?

Фольклор

Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

11. Сложили n трехзначных чисел, в записи каждого из которых цифры идут в порядке возрастания слева направо. В результате получили число, в записи которого цифры идут в порядке убывания. При каком наименьшем n такое возможно?

Д.Калинин

12. Докажите, что:

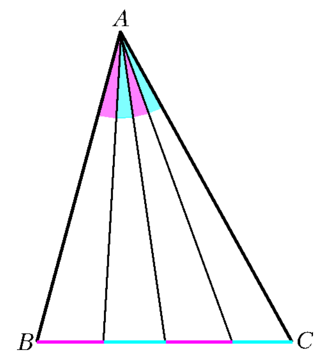
а) существует сколь угодно много положительных рациональных чисел, являющихся решением уравнения $\{x\}-\{x^2\}=0,25$;

б) не существует ни одного положительного рационального числа, являющегося решением уравнения $\{x\}+\{x^2\}=0,5$.

Фигурные скобки здесь обозначают дробную часть числа: $\{t\}=t-[t]$, где $[t]$ – наибольшее целое число, не превышающее t.

В.Кириак (Румыния)

13. Могут ли три прямые разделить угол A треугольника ABC на две пары равных углов, а отрезок BC – на две пары равных отрезков так, как показано на рисунке (равные углы и соответствующие равные отрезки изображены одним цветом)?



С.Дворянинов

14. Пусть n и k – некоторые нечетные натуральные числа. Докажите, что сумма k-х степеней любых n последовательных целых чисел делится на n.

В.Сендеров

15. Для каких натуральных n в клетках квадратной таблицы $n\times n$ можно расставить числа от 1 до n^2 так, чтобы суммы чисел во всех вертикалях, всех горизонталях и обеих диагоналях были нечетными?

В. Берник, И.Акулич

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Интерференция света

В.МОЖАЕВ

В том случае, когда при наложении световых волн происходит не суммирование их интенсивностей, а пространственное перераспределение энергии светового излучения, говорят об интерференции волн. Однако наши повседневные наблюдения показывают, что освещенность, создаваемая двумя или несколькими световыми пучками, является простым сложением освещенностей, создаваемых отдельными пучками. Возникает вопрос: почему же мы не наблюдаем в этих случаях интерференции световых волн? Попробуем на него ответить.

Условием интерференции волн с одинаковыми частотами является их *когерентность*. Это очень важное понятие, поэтому остановимся на нем более подробно.

Уравнение плоской электромагнитной волны с длиной волны λ, распространяющейся вдоль оси X, имеет вид

$$E(x,t)=E_0\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi_0\right),$$

где E – напряженность электрического поля волны, $\omega=\dfrac{2\pi c}{\lambda}$ – частота, c – скорость света в вакууме, φ_0 – начальная фаза. Выражение в скобках (аргумент косинуса) называется фазой волны φ. Если эта же волна распространяется в среде с показателем преломления n, то зависимость $E(x,t)$ будет такой:

$$E(x,t)=E_0\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}nx+\varphi_0\right).$$

В среде в n раз уменьшается длина волны, но обычно ее сохраняют, а путь, пройденный волной, умножают на n и называют это произведение оптическим путем. Это удобно – не надо думать об изменении длины волны.

Пусть теперь две такие волны приходят в одну точку (например, на экране):

$$E_1 = E_{01}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} l_1 + \varphi_{01}\right),$$

$$E_2 = E_{02}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} l_2 + \varphi_{02}\right),$$

где l_1 и l_2 – оптические пути, пройденные волнами до встречи. Разность фаз между этими волнами в данной точке равна

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\left(l_2 - l_1\right) + \varphi_{01} - \varphi_{02}.$$

Как видно, разность фаз $\Delta\varphi$ не зависит от времени. Такие колебания, сдвиг фаз между которыми остается постоянным по крайней мере за время наблюдения, и называют когерентными.

Рассмотренные нами две монохроматические волны с одинаковыми длинами волн всегда когерентны, но дело в том, что монохроматических волн (со строго определенной длиной волны) в природе не существует – это чисто математическое понятие. Реальные волны всегда имеют разброс длин волн в некотором интервале $\Delta\lambda$ около средней длины волны $\lambda_{\text{ср}}$. Когда $\Delta\lambda \ll \lambda_{\text{ср}}$, говорят о *квазимонохроматических* (почти монохроматических) волнах. И это принципиально – они всегда «квази-», но никогда не монохроматические.

Квазимонохроматическую волну можно рассматривать как кусок, или цуг, монохроматической волны, такой цуг всегда имеет начало и конец. Поэтому у волн от двух реальных источников даже с одинаковыми средними длинами волн начальные фазы φ_{01} и φ_{02} хаотически изменяются со временем, а не остаются постоянными, как в случае монохроматической волны. Следовательно, и разность фаз $\Delta\varphi$ между волнами за время наблюдения не остается постоянной, а хаотически изменяется во времени. Такие волны не когерентны, и они не интерферируют.

По этой причине независимых когерентных источников не существует, а для наблюдения интерференции обычно используют оптические интерференционные схемы, в которых из одного реального источника получают два когерентных источника. Ниже мы рассмотрим такие оптические схемы.

Любой интерференционный опыт всегда можно представить в виде эквивалентной оптической схемы, состоящей из двух когерентных источников и экрана, на котором наблюдается интерференционная картина. Эти два когерентных источника могут быть или оба мнимые, или один действительный, а другой мнимый, или оба действительные.

Задача 1. *Два точечных когерентных квазимонохроматических источника света, расстояние между которыми d, находятся на расстоянии L от экрана ($L \gg d$). Определите ширину интерференционных полос в наблюдаемой интерференционной картине, если длина волны света равна λ.*

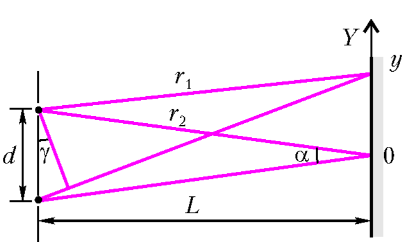


Рис. 1

Найдем распределение интенсивности (освещенности) света на экране вдоль оси $0Y$ (рис.1). Рассмотрим произвольную точку с координатой y. Пусть силы света наших источников равны, а разность оптических путей мала: $r_2 - r_1 \ll r_1$. В этом случае можно считать, что амплитуды сферических волн в точке с координатой y одинаковы – обозначим эту амплитуду через E_0. Тогда напряженность электрического поля в нашей точке от верхнего источника можно записать в виде

$$E\left(r_1, t\right) = E_0\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_1\right),$$

где $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, а начальную фазу положим равной нулю. Аналогичное выражение получаем для поля от нижнего источника:

$$E\left(r_2, t\right) = E_0\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_2\right).$$

Практически все приемники света (фотоэлементы, наш глаз) реагируют на освещенность I света, т.е. на квадрат амплитуды электрического поля: $I \sim E_0^2$. Найдем освещенность света в нашей точке:

$$I\left(y,t\right) = \left(E_0\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_1\right) + E_0\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_2\right)\right)^2 =$$

$$= E_0^2\cos^2\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_1\right) + E_0^2\cos^2\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_2\right) +$$

$$+ 2E_0^2\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_1\right)\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_2\right) =$$

$$= E_0^2\cos^2\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_1\right) + E_0^2\cos^2\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_2\right) +$$

$$+ E_0^2\cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}\left(r_1 + r_2\right)\right) + E_0^2\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(r_2 - r_1\right)\right).$$

Обычные приемники света не реагируют на частоту света ($\sim 10^{15}$ Гц), а воспринимают усредненную по времени интенсивность света. Среднее значение функции $f\left(t\right)$ за интервал времени T равно

$$\overline{f\left(t\right)} = \frac{1}{T}\int_0^T f\left(t\right)dt.$$

Поэтому усредненная за период освещенность будет равна

$$I\left(y\right) = E_0^2 + E_0^2\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(r_2 - r_1\right)\right).$$

Оптическая разность хода составляет (см. рис.1)

$$r_2 - r_1 \approx d\gamma \approx d\frac{y}{L} \approx y\alpha.$$

Угол α обычно называют углом сходимости интерферирующих лучей. Окончательное распределение интенсивности света запишем в виде

$$I\left(y\right) = E_0^2\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\alpha y}{\lambda}\right)\right).$$

Эта зависимость $I\left(y\right)$ изображена на рисунке 2.

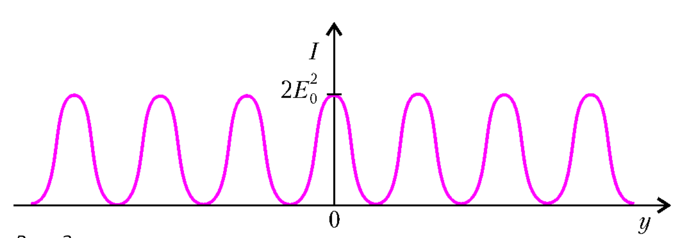


Рис. 2

Шириной интерференционных полос называют расстояние между двумя соседними максимумами (или минимумами). Максимальная интенсивность света будет наблюдаться при условии, что

$$\frac{2\pi\alpha y_m}{\lambda} = 2\pi m, \quad \text{где} \quad m = 0,\ 1,\ 2\ldots$$

Тогда ширина полос будет равна

$$\delta = y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda L}{d}.$$

Как видно, ширина интерференционных полос прямо пропорциональна длине волны и обратно пропорциональна углу сходимости интерферирующих лучей.

Перейдем к разбору конкретных интерференционных схем.

Задача 2. *Параллельный пучок света, полученный с помощью точечного источника света S, расположенного в фокусе собирающей линзы, падает на бипризму с преломляющим углом $\beta = 1°$ (рис.3). На каком расстоянии L нужно*

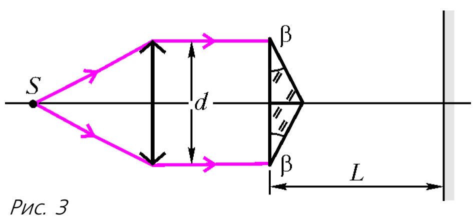


Рис. 3

расположить экран, чтобы на нем можно было наблюдать максимальное число интерференционных полос? Чему равно это количество полос? Длина волны света $\lambda = 0{,}65$ мкм, показатель преломления материала призмы $n = 1{,}5$, а поперечный размер пучка $d = 1$ см.

После прохождения призмы световой пучок разобьется на два параллельных пучка, распространяющихся под углами γ к горизонтальной оси (рис.4). При малом угле β

$$\gamma = (n-1)\beta.$$

На рисунке 4 хорошо видна область пересечения этих

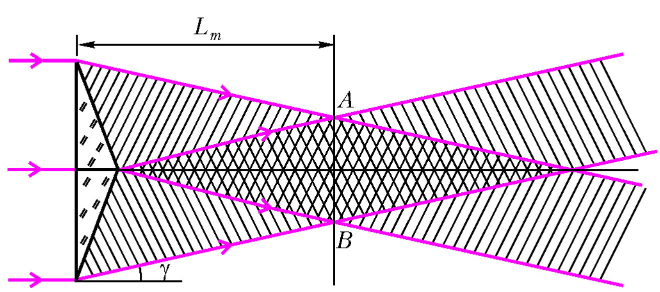


Рис. 4

пучков. Именно в этой области и можно наблюдать интерференционную картину.

Найдем ширину интерференционных полос. Из рисунка 4 угол сходимости пучков в данной интерференционной схеме равен

$$\alpha = 2\gamma = 2(n-1)\beta.$$

Воспользовавшись выражением для ширины полос, полученным в задаче 1, можно записать

$$\delta = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda}{2(n-1)\beta}.$$

Как видно, ширина полос не зависит от положения экрана, на котором наблюдается интерференционная картина. Поэтому максимальное число интерференционных полос будет в месте максимального перекрытия пучков, т.е. в области AB. Из простых геометрических соображений найдем соответствующее расстояние L от призмы до экрана:

$$L = \frac{d/4}{\operatorname{tg}\gamma} \approx \frac{d}{4\gamma} = \frac{d}{4(n-1)\beta} = 28{,}7 \text{ см}.$$

Размер интерференционной картины на экране, установленном на расстоянии L, при условии тонкой призмы равен $d/2$. Поэтому максимальное число полос равно

$$m_{\max} = \frac{d/2}{\delta} = \frac{d(n-1)\beta}{\lambda} = 134.$$

Разобранный в данной задаче интерференционный опыт является примером того, когда эквивалентная интерференционная схема состоит из двух когерентных источников, которые являются мнимыми изображениями нашего реального источника S. Эти два мнимых источника находятся в бесконечности, но угол сходимости (в данном случае это угловой размер между источниками) конечен и равен 2γ.

А теперь рассмотрим пример оптического опыта, в котором эквивалентная интерференционная схема включает в себя два когерентных источника, один из которых действительный, а другой мнимый.

Задача 3. *В интерференционном опыте, изображенном на рисунке 5, используется квазимонохроматический точечный источник света S. Найдите ширину интерференционных полос на экране Э, а также максимальный и мини-*

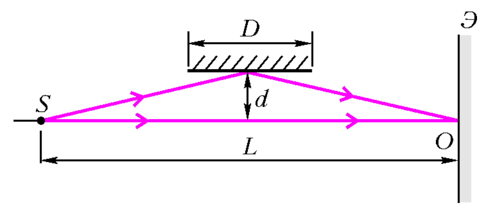


Рис. 5

мальный порядки наблюдаемых полос. Параметры установки: L = 1 м, D = 10 см, d =0,5 см, отражающее зеркало расположено посередине между источником и экраном, длина волны света $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см.

Указание: при малых x ($x \ll 1$) можно считать, что $(1+x)^N \approx 1 + Nx$.

Для данного опыта эквивалентная интерференционная схема изображена на рисунке 6. Двумя когерентными источниками являются наш действительный источник света S и его мнимое изображение S' в плоском зеркале. Область взаимного пересечения сферических волн от этих источников заштрихована. Поскольку расстояние от зеркала до оси SO мало ($d \ll L$), можно считать, что угол сходимости интерферирующих лучей равен

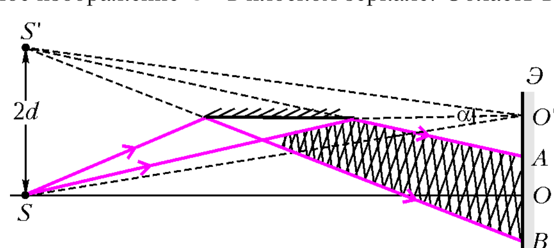


Рис. 6

$$\alpha = \frac{2d}{L},$$

а ширина интерференционных полос равна

$$\delta = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda L}{2d} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ см}.$$

Как видно из рисунка 6, точка O' соответствует нулевому порядку интерференции (разность хода приходящих в эту точку волны равна нулю), но в нашей схеме в этом месте экрана интерференционной картины нет, она начинается ниже – в точке A, а заканчивается в точке B. Очевидно, что в точке A мы будем иметь минимальный порядок интерференции, а в точке B – максимальный. Найдем эти порядки.

Оптический путь $S'A$ равен приблизительно

$$S'A \approx L\left(1+\frac{2d^2}{(L+D)^2}\right),$$

а оптический путь SA составляет

$$SA \approx L\left(1+\frac{2d^2D^2}{(L+D)^2L^2}\right).$$

Получить эти выражения из простых геометрических соображений мы предоставляем читателю.

Интерференционный порядок для точки A находится из условия

$$S'A - SA = m_A\lambda .$$

Отсюда

$$m_A \approx \frac{2d^2(L-D)}{\lambda L(L+D)} \approx 80 .$$

Аналогично, для точки B оптический путь $S'B$ равен приблизительно

$$S'B \approx L\left(1+\frac{2d^2}{(L-D)^2}\right),$$

а оптический путь SB составляет

$$SB \approx L\left(1+\frac{2d^2D^2}{(L-D)^2L^2}\right).$$

Тогда интерференционный порядок для точки B будет

$$m_B \approx \frac{2d^2(L+D)}{\lambda L(L-D)} \approx 122 .$$

Задача 4. *На плоскопараллельную прозрачную пластинку толщиной d с показателем преломления материала n под углом* α *падает параллельный пучок квазимонохроматического света с длиной волны* λ *(рис.7). Определите оптическую разность хода* Δ *между двумя когерентными волнами, отраженными от верхней и нижней поверхностей пластинки.*

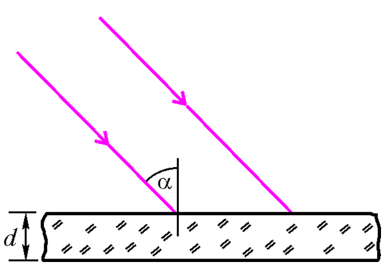


Рис. 7

Когда мы говорим о параллельном пучке света, то подразумеваем плоскую электромагнитную волну, у которой поверхность постоянной фазы, т.е. волновой фронт, это плоскость, перпендикулярная направлению распространения светового пучка. Волновой фронт в падающей волне на рисунке 8 обозначен прямой AB, которая принадлежит этому фронту. Часть пучка (волны) отражается от передней поверхности пластинки – волновой фронт этой волны $A'B'$. Другая часть пучка преломляется и распространяется в пластинке, а затем частично отражается от ее задней поверхности. Эта отраженная волна возвращается к передней поверхности пластинки, преломляется и выходит в том же направлении, что и волна, отраженная от передней поверхности. Волновой фронт волны, отраженной от задней поверхности пластинки, обозначим $A''B''$. В точке A' обе отраженные волны находятся в фазе, в этой точке падающая волна раздваивается на две волны. Если мы расположим экран вдоль прямой $A''B''$, то волна, отраженная от передней поверхности, пройдет до экрана оптический путь $A'D$, а отраженная от задней поверхности – оптический путь $A'CA''$. Вычислим эти пути.

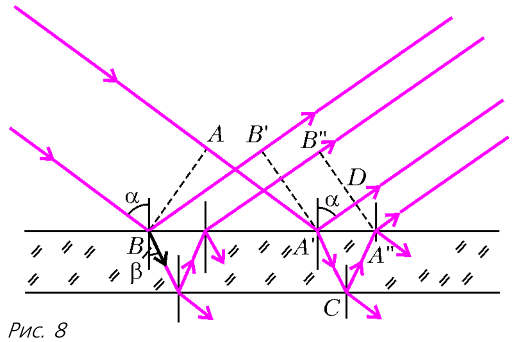


Рис. 8

Из треугольника $A'CA''$ найдем

$$A'C = CA'' = \frac{d}{\cos\beta}, \quad A'A'' = 2d\,\mathrm{tg}\,\beta ,$$

откуда получим оптический путь $A'CA''$:

$$A'CA'' = \frac{2dn}{\cos\beta} .$$

Теперь из треугольника $A'DA''$ найдем оптический путь $A'D$:

$$A'D = A'A''\sin\alpha = 2d\,\mathrm{tg}\,\beta\sin\alpha .$$

Используя соотношение между углами падения и преломления:

$$\sin\alpha = n\sin\beta ,$$

можно записать

$$A'CA'' = \frac{2dn^2}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} , \quad \text{и} \quad A'D = \frac{2d\sin^2\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} .$$

Таким образом, разность хода между двумя последовательными волнами, отраженными от передней и задней поверхностей пластинки, равна

$$A'CA'' - A'D = 2d\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} .$$

К полученной разности хода необходимо добавить поправку, которая вызвана различием в условиях отражения электромагнитной волны на границах воздух – вещество (верхняя поверхность пластинки) и вещество – воздух (нижняя граница). Не вдаваясь в подробности, укажем, что эта дополнительная разность хода равна $\lambda/2$. Поэтому окончательно

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} + \frac{\lambda}{2} .$$

Задача 5. *В интерференционной схеме параллельный пучок квазимонохроматического света с длиной волны* $\lambda = 5000\ \mathring{A}$ *падает под углом* $\alpha = 60^\circ$ *на систему из двух плоскопараллельных полупрозрачных зеркал 1 и 2 (рис.9). Часть светового пучка отражается от зеркала 1, оставшаяся часть, пройдя зеркало 1, частично отражается от зеркала 2 и, снова пройдя зеркало 1, вместе с пучком, отраженным от зеркала 1, с помощью собирающей линзы Л фокусируется на приемник П, сигнал которого пропорционален интенсивности падающего на него света. Какова будет частота переменного сигнала, регистрируемого*

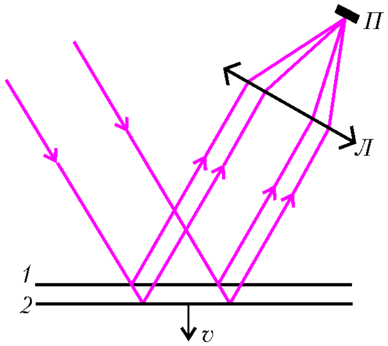


Рис. 9

приемником, в случае равномерного движения второго зеркала (относительно первого) со скоростью $v = 0{,}01$ см/с?

Воспользуемся результатом, полученным при решении предыдущей задачи. Пусть в некоторый произвольный момент времени расстояние между зеркалами равно x, тогда разность хода Δ между пучками света, отраженными от зеркал, составляет

$$\Delta = 2x\sqrt{1-\sin^2\alpha} = 2x\cos\alpha .$$

В данном случае поправки на $\lambda/2$ нет, поскольку отражения от обоих зеркал одинаковые.

Сделаем небольшое пояснение по поводу действия линзы. В фокальной плоскости линзы от каждого параллельного пучка получается световое пятнышко, появление которого обусловлено дифракцией световых пучков на линзе. Размер этого пятна пропорционален длине волны света λ и обратно пропорционален поперечному размеру пучка. Но самое главное свойство линзы состоит в том, что она сохраняет разность хода между нашими двумя пучками света, которые собираются в ее фокальной плоскости.

Пусть в некоторый момент времени расстояние между зеркалами равно x_1, при этом разность хода $\Delta(x_1)$ кратна целому числу длин волн, например с коэффициентом m:

$$2x_1\cos\alpha = m\lambda .$$

В этом случае на приемнике будет максимальная освещенность света. Если через минимальное время T освещенность света на приемнике снова будет максимальной, то можно записать

$$2(x_1 + vT)\cos\alpha = (m+1)\lambda .$$

Вычитая из последнего равенства предпоследнее, получим

$$2vT\cos\alpha = \lambda .$$

Отсюда найдем частоту переменного сигнала, регистрируемого приемником:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{2v\cos\alpha}{\lambda} = 200 \text{ Гц} .$$

В разобранном опыте мы не наблюдаем интерференционную картину как таковую: поверхность приемника имеет равномерную освещенность, которая зависит от расстояния между зеркалами. Это связано с тем, что у нас задан пучок света только с одним фиксированным углом падения. При наличии световых пучков с другими углами падения в фокальной плоскости линзы наблюдалась бы типичная интерференционная картина в виде полос. Такие интерференционные полосы называют полосами равного наклона. При изменении расстояния между зеркалами будет происходить смещение всей интерференционной картины вдоль экрана.

Задача 6. *Интерференционные полосы, возникающие на поверхности тонкого стеклянного клина с показателем преломления $n = 1{,}5$ при освещении рассеянным квазимонохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 5000$ Å, проецируются собирающей линзой на экран (рис.10). Главная оптическая ось линзы перпендикулярна поверхности клина, расстояние от линзы до клина $a = 10$ см, а от линзы до экрана $b = 100$ см. Ширина интерференционных полос, наблюдаемых на экране, $\delta = 2$ мм. Определите угол клина φ.*

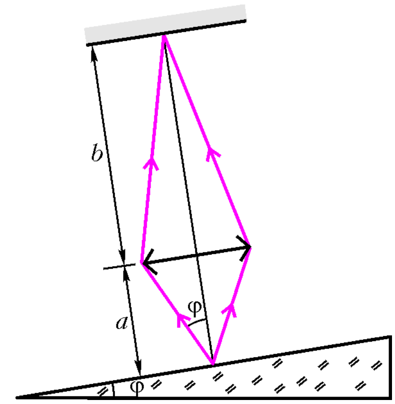


Рис. 10

На поверхность клина падает рассеянный свет, т.е. угол падения изменяется в интервале $0 \le \alpha \le \pi/2$, но в интерференции будут участвовать только те лучи света, угол падения которых находится в пределах $0 \le \alpha \le \varphi$. Если мы посмотрим на выражение для разности хода Δ, полученное в задаче 4, то увидим, что разность хода зависит как от толщины слоя d, так и от угла падения α. Данная интерференционная схема основана на зависимости Δ от d, а неизбежное наличие разброса угла падения приводит к размытию интерференционных полос. Поэтому в нашей схеме для наблюдения четкой интерференционной картины желательно задиафрагмировать линзу и уменьшить разброс угла падения до разумного предела. Мы будем предполагать, что это условие выполнено и угол падения $\alpha \approx 0$.

Найдем сначала ширину интерференционных полос на поверхности клина. Пусть толщина клина d_1 соответствует светлой полосе m-го порядка, тогда

$$2d_1 n + \frac{\lambda}{2} = m\lambda ,$$

где m – целое число. А светлой полосе $(m+1)$-го порядка пусть соответствует толщина клина d_2:

$$2d_2 n + \frac{\lambda}{2} = (m+1)\lambda .$$

Вычитая почленно одно равенство из другого, получим

$$2(d_2 - d_1)n = \lambda .$$

Теперь из треугольника ABC (рис.11) найдем ширину полос $\delta_{\text{кл}}$ на поверхности клина:

$$\delta_{\text{кл}} = \frac{d_2 - d_1}{\sin\varphi} \approx \frac{d_2 - d_1}{\varphi} .$$

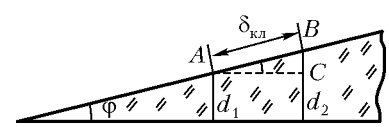


Рис. 11

Но ширина полос на экране δ связана с шириной полос на клине $\delta_{\text{кл}}$ через увеличение линзы простым соотношением:

$$\delta = \frac{b}{a}\delta_{\text{кл}} .$$

Тогда

$$\frac{a}{b}\delta = \delta_{\text{кл}} \approx \frac{d_2 - d_1}{\varphi} \approx \frac{\lambda}{2n\varphi} .$$

Отсюда находим искомый угол клина:

$$\varphi \approx \frac{b\lambda}{2an\delta} = 0{,}83 \cdot 10^{-3} \text{ рад} .$$

Задача 7. *Свет с длиной волны λ от двух точечных некогерентных квазимонохроматических источников S_1 и S_2 падает на непрозрачный экран $Э_1$ с двумя отверстиями, расстояние между которыми d (рис.12). Интерференция света, прошедшего через отверстия, наблюдается на экране $Э_2$ вблизи точки 0, лежащей на оси системы.*

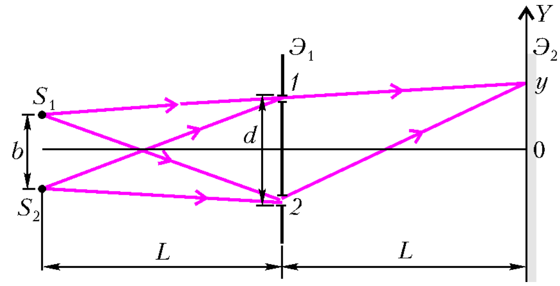


Рис. 12

Источники и точка наблюдения находятся на одном и том же расстоянии L от экрана $Э_1$. При симметричном удалении источников от оси интерференционная картина периодически возникает и исчезает. Определите расстояния b_N, при которых интерференционная картина исчезает (экран $Э_2$ равномерно освещен).

Найдем распределение интенсивности света на экране $Э_2$ в зависимости от расстояния b между источниками. Запишем интенсивность света от каждого источника в точке с координатой y. Рассмотрим источник S_1. Оптическая разность хода между лучами $S_1 2y$ и $S_1 1y$ равна

$$\Delta_1 = \frac{db}{2L} + \frac{dy}{L}.$$

Воспользовавшись решением задачи 1, найдем освещенность на экране $Э_2$ в точке с координатой y:

$$I_1(b, y) = E_0^2\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{db}{2L} + \frac{dy}{L}\right)\right)\right),$$

где E_0 – амплитуды интерферирующих волн. Аналогично, для источника S_2 оптическая разность хода между лучами $S_2 2y$ и $S_2 1y$ равна

$$\Delta_2 = \frac{dy}{L} - \frac{db}{2L},$$

и интенсивность света от источника S_2 составляет

$$I_2(b, y) = E_0^2\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{dy}{L} - \frac{db}{2L}\right)\right)\right).$$

Поскольку источники S_1 и S_2 некогерентны, результирующая интенсивность будет равна сумме интенсивностей от каждого источника:

$$I(b, y) = I_1(b, y) + I_2(b, y) =$$

$$= 2E_0^2 + E_0^2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{dy}{L} + \frac{db}{2L}\right)\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{dy}{L} - \frac{db}{2L}\right)\right)\right) =$$

$$= 2E_0^2\left(1 + \cos\frac{\pi db}{\lambda L}\cos\frac{2\pi dy}{\lambda L}\right).$$

Как видно из полученного выражения, амплитуда A переменной составляющей в распределении освещенности на экране $Э_2$ зависит от расстояния b между источниками по закону

$$A(b) = \cos\frac{\pi db}{\lambda L}.$$

Интерференционная картина исчезает, когда амплитуда $A(b)$ становится равной нулю:

$$\cos\frac{\pi db}{\lambda L} = 0.$$

Соответствующие расстояния b_N между источниками определяются из соотношения

$$\frac{\pi d b_N}{\lambda L} = \frac{\pi}{2} + \pi N, \quad \text{где } N = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

откуда

$$b_N = \frac{(2N+1)\lambda L}{2d}.$$

Упражнения

1. Точечный квазимонохроматический источник света S с длиной волны $\lambda = 5000$ Å расположен на расстоянии $a = 60$ см от линзы с фокусным расстоянием $F = 20$ см. Линза разрезана по диаметру, и ее половинки раздвинуты на расстояние l = = 2 мм (рис.13). Чему будет равна ширина интерференционных

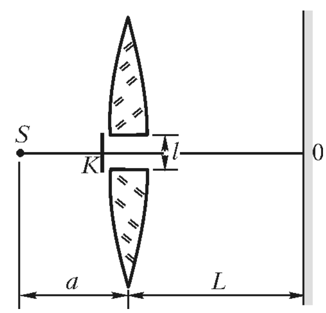


Рис. 13

полос, наблюдаемых на экране, установленном на расстоянии $L = 3{,}3$ м от линзы? Зазор между половинками линзы перекрыт экраном K.

2. Выразите расстояние x от центра интерференционной картины до m-й светлой полосы в опыте с бипризмой (рис.14). Показатель преломления материала призмы n, преломляющий

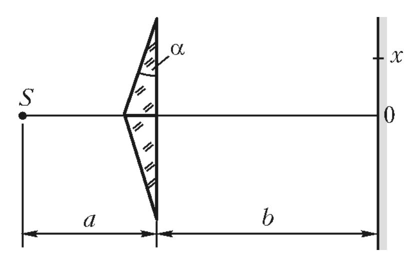


Рис. 14

угол α, длина волны света λ. Расстояние от точечного источника S до призмы a, от призмы до экрана b. Преломляющий угол α мал.

3. С помощью зрительной трубы, установленной на бесконечность, наблюдают интерференционные полосы равного наклона в тонкой плоскопараллельной стеклянной пластинке толщиной h = 0,2 мм с показателем преломления n = 1,41 при угле наблюдения $\alpha = 60°$ (рис.15). Найдите порядок m центральной

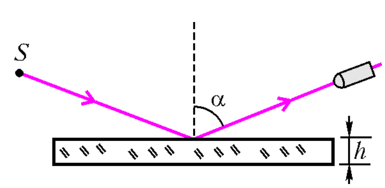


Рис. 15

интерференционной полосы (по центру фокальной плоскости окуляра). Длина волны света $\lambda = 560$ нм.

Календарь

Один из древнейших календарей появился на территории Египта за несколько тысячелетий до нашей эры. Провозвестником Нового года считалась звезда Сотис (Сириус), восход которой в лучах утреннего солнца обещал скорый и очень желанный разлив Нила. Бытует мнение, что первый годичный календарь в 365 дней введен в 4241 году до н.э. в области позднейшего Мемфиса. Не все историки согласны с вышеуказанной датой, но никто не спорит, что примерно за две тысячи лет до н.э. 365-дневный календарь уже был в обиходе, о чем свидетельствуют, например, надписи на крышках саркофагов Среднего Царства (2100–1400 до н.э.).

Учредители первого календаря пребывали в убеждении – и в этом кроется одно из проявлений загадочной магии целых чисел – что видимое перемещение звезды Сотис по небосводу измеряется целым количеством суток. Вскоре наблюдавшие за небом жрецы убедились в ошибочности такого представления, что нетрудно было сделать, поскольку новогодняя дата «поплыла» по природным сезонам. Однако формула «1 год = 365 суток» оказалась столь привлекательной, что очарованные законодатели календаря не стали менять ее на более точную открывшуюся им зависимость «1 год = $= 365\frac{1}{4}$ суток».

Находчивые жрецы период между двумя совпадениями начала календарного года с утренним восходом Сотис назвали «годом Бытия», или «Божественным годом». В современной литературе его именуют годом Сотис. Поскольку одни «лишние» сутки набегают за 4 обычных календарных года, то год Сотис имеет период $4 \times 365 = 1460$ лет. Пользуясь этим периодом и исходя из совпадения утреннего восхода Сотис с началом египетского календарного года в 139 году, греческий математик и астроном Теон Александрийский (вторая половина IV в.) вычислил, что такие совпадения происходили в 1321, 2781, 4241 годах до нашей эры. По поводу последней даты известный математик Ван-дер-Варден отметил: «В целом этот расчет имеет малое отношение к древнеегипетской хронологии. Теону было известно так же мало, как и нам, о том, употреблялся ли уже египетский календарь в году –4241 и наблюдался ли в этом году восход Сириуса 1-го числа месяца тота». Месяц тот – аналог нашего января, первый месяц древнеегипетского календаря. Тот – весьма почитаемый в Древнем Египте бог мудрости, счета и письма.

Вступая на престол, египетские фараоны клялись не изменять длину блуждающего по природным сезонам года. Однако попытки слегка откорректировать календарь все же были. В конце 18 века до н.э. северную часть дельты Нила покорили азиатские кочевые племена гиксосов, цари которых составили XV династию Египта. Предводитель завоевателей царь Салитис распорядился ввести систему високосов: к каждому четвертому году длительностью 365 дней добавлять еще один 366-й день. Спустя столетие гиксосы были изгнаны из Египта, и гражданский календарь вернулся к своим истокам.

Аналогичную реформу календаря предпринял уже в 238 году до н.э. царь Птолемей III Эвергет – представитель династии, воцарившейся в Египте после завоевания его Александром Македонским. Но реформа Эвергета также продержалась недолго – как только он почил, все вернулось «на круги своя». В этом убеждает красноречивый иероглифический текст времен Птолемея IV Филопатора: «Хвала тебе, Исида-Сотис… хозяйка 14 столетий и 60 лет, которая пребывает в своем священном месте уже 730 лет и 3 месяца, 3 дня и 3 часа…»

Лишь в конце 1 века до н.э. после завоевания Египта римлянами древний египетский календарь отступил на задворки истории. Именно отступил, поскольку он до сих пор используется эфиопами и коптами – потомками египтян.

Юлианский календарь, названный в честь римского полководца и государственного деятеля Юлия Цезаря (100–44 до н.э.), окончательно узаконил систему високосов. Введен этот календарь 1 января 45 года до н.э. В правление римского императора Октавиана Августа (27 до н.э. – 14 н.э.) юлианский календарь приобрел строение, сохранившееся до нашего времени (им до сих пор пользуется православная церковь, называя его «старым стилем»). Следует, однако, иметь в виду, что точка нулевого отсчета календаря «наша эра», или «рождество Христово», появилась гораздо позже – она была предложена в 532 году римским монахом Дионисием, а повсеместно стала применяться лишь с XVI века.

Несмотря на более высокую точность юлианского календаря по сравнению с древнеегипетским, в нем также накапливается погрешность – почти трое лишних суток за 400 лет. Для устранения этой погрешности в 1582 году была предпринята последняя реформа календаря. Римский папа Григорий XIII издал специальную буллу, в соответствии с которой вековые годы с не делящимся на 4 числами сотен в номерах (1700, 1800, 1900, 2100 и т.д.) високосными не считаются, а все остальные годы с кратными 4 номерами являются високосными. В честь папы календарь получил название григорианского. В настоящее время он принят в большинстве стран (в частности, в России – с 24 января 1918 года).

✔ Согласно современным астрономическим данным, продолжительность года составляет

$$365+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7}}}}}}$$

средних астрономических суток. Различной точности приближения получаются, если вместо этой цепной дроби рассматривать ее составные части.

Нулевое приближение: отбрасывая всю дробную часть, получаем 365 – длительность года в сутках в древнеегипетском календаре.

Первое приближение: $365\frac{1}{4}$ – длительность года в юлианском календаре.

Второе приближение: $365+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7}}=365\frac{7}{29}$.

Третье приближение: $365+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1}}}=365\frac{8}{33}$ – длительность года в календаре, предложенном известным поэтом и математиком Омаром Хайямом (1048–1131). В каждом периоде из 33 лет такого календаря 8 лет – високосные. Погрешность в одни сутки накапливается примерно за 4437 лет. Для сравнения: в ныне действующем григорианском календаре длительностью $365\frac{97}{400}$ суток погрешность в одни сутки накапливается примерно за 3321 год. Предложение Омара Хайяма легло в основу календаря, который действовал в Иране с 1079 года до середины XIX века.

Четвертое приближение: $365+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}=$

$=365\frac{31}{128}$ – длительность года в календаре немецкого астронома И.Г.Мёдлера (1794–1874). В периоде из 128 лет високосными назначаются 31. Погрешность в одни сутки накапливается примерно за 88496 лет. Мёдлер предложил свой календарь в 1864 году, но провести его проект в жизнь не удалось.

✔ Лунный год определяется целым числом циклов фаз Луны. В настоящее время применяется в некоторых исламских странах. Календарный лунный год состоит из 12 месяцев (один месяц – время между двумя последовательными одинаковыми фазами Луны) и содержит 354 или 355 суток. По современным астрономическим данным, продолжительность лунного года составляет 354,36706 средних солнечных суток.

✔ В лунно-солнечном календаре рассматривается отношение продолжительности солнечного года к продолжительности лунного месяца. Согласно современным данным, это отношение равно

Древний каменный календарь Стоунхендж (Великобритания). Возведен в три этапа между 3500 и 1100 годами до н.э.

$$12+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{153}{2534}}}}}}.$$

Пятое приближение $12\frac{7}{19}$ этой дроби соответствует так называемому циклу Метона – календарю, предложенному древнегреческим астрономом Метоном в 432 году до н.э. (аналогичный календарь использовался также в Древнем Китае и Вавилоне). 19-летний календарь Метона состоял из 235 месяцев, из которых 110 месяцев имели по 29 дней, а 125 – по 30 дней. Календарный год состоял из 12 или 13 месяцев, причем дополнительный 13-й месяц за 19 лет вставлялся 7 раз.

✔ Как определить название дня недели, который приходится на заданную дату в григорианском календаре?

Представим эту дату следующими величинами: d – номер дня месяца (число); m – номер месяца, причем счет ведется начиная с марта: 1 – март, 2 – апрель, … …, 12 – февраль; y – номер года в столетии (остаток от деления полного номера года на 100); c – количество столетий с учетом того, что январь считается 11-м, а февраль – 12-м месяцем предыдущего года.

Перенумеруем дни недели в следующем порядке: 0 – воскресенье, 1 – понедельник, …, 6 – суббота.

Искомый номер дня недели заданной даты равен неотрицательному остатку от деления на 7 величины

$$w=d+\left[\frac{13m-1}{5}\right]+y+\left[\frac{y}{4}\right]+\left[\frac{c}{4}\right]-2c,$$

где квадратные скобки обозначают целую часть числа, т.е. наибольшее целое число, не превышающее данное (стоящее в скобках). Например, для даты 31 декабря 2006 года имеем: $d=31$, $m=10$, $y=6$, $c=20$, поэтому $w=31+25+6+1+5-40=28$. Неотрицательный остаток от деления числа 28 на 7 равен 0, поэтому 31 декабря 2006 года попадает на воскресенье.

Материал подготовил А. Жуков

Функциональные уравнения и неравенства

Г.ФАЛИН, А.ФАЛИН

Классические функциональные уравнения

Каждая функции, используемая в математике, обладает определенным набором свойств, выражаемых равенствами, неравенствами и более сложными утверждениями.

Например, для показательной функции $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, справедливы такие соотношения (при всех значениях входящих в них переменных x и y):

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y;$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y};$$

$$a^x > 0;$$

$$a^0 = 1;$$

и т.п. Некоторые свойства этой функции формулируются в более сложных терминах:

$f(x) = a^x$ возрастает, если $a > 1$, и убывает, если $0 < a < 1$;

$f(x) = a^x$ непрерывна при всех x;

$f(x) = a^x$ дифференцируема при всех x и при этом $f'(x) = a^x \cdot \ln a$.

Если из этих соотношений исключить явный вид функции и оставить только символ $f(x)$, то сформулированные свойства примут следующий вид:

$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$;

$f(x-y) = \dfrac{f(x)}{f(y)}$;

$f(x) > 0$;

$f(0) = 1$;

$f(x)$ возрастает, если $a > 1$, и убывает, если $0 < a < 1$;

$f(x)$ непрерывна при всех x;

$f(x)$ дифференцируема при всех x и при этом $f'(x) = f(x) \cdot \ln a$.

В такой форме некоторые из них (например, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, $f'(x) = f(x) \cdot \ln a$) можно рассматривать как функциональные уравнения, что приводит к естественному вопросу о множестве их решений. Наиболее интересной является ситуация, когда такое уравнение не имеет никаких других решений, кроме функции, свойства которой и привели к этому уравнению. В этом случае говорят, что функциональное уравнение является функциональной характеристикой соответствующей функции.

Окончание. Начало см. в «Кванте» №5.

Если в уравнение входит операция дифференцирования, то такое функциональное уравнение называют дифференциальным уравнением (таким является, например, уравнение $f'(x) = f(x) \cdot \ln a$). Теория дифференциальных уравнений является громадным (если не сказать больше) разделом современной математики с многочисленными приложениями к задачам естествознания. Простейшие дифференциальные уравнения разбираются и в школьном курсе. Но поскольку понятие производной не входит в Программу вступительных экзаменов для поступающих в МГУ, даже самые простые дифференциальные уравнения не предлагаются на вступительных испытаниях.

Другое дело — уравнения, в которые входят обычные действия «+», «−» и т.д., например, уравнение $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$. В некоторых случаях их решения, по крайней мере частичные, требуют внешне совершенно элементарных преобразований и рассуждений и приводят к функциям, включенным в Программу (линейной, показательной, логарифмической, тригонометрической), что дает формальные основания предлагать их на вступительных экзаменах. Конечно, задачи формулируются так, чтобы ни термин «функциональное уравнение», ни термин «функциональная характеристика» не появлялись в их тексте. Но по существу основой и сутью этих задач являются именно эти понятия.

Другое важное обстоятельство заключается в том, что функциональная характеристика перечисленных выше элементарных функций была дана Коши. Соответствующая теория изящна и хорошо известна каждому математику. Она обычно излагается в курсе математического анализа для иллюстрации понятия непрерывной функции. С другой стороны, как мы отмечали, для понимания большей ее части достаточно фактов и методов школьной математики. Подобные фрагменты «высокой» математики относительно часто служат основой нестандартных задач вступительных экзаменов. Конечно, решить их в реальной боевой обстановке экзамена без знания этой общей теории довольно тяжело.

Функциональная характеристика прямой пропорциональности

Прямой пропорциональностью называется функция вида $y = kx$. Очевидно, что все такие функции являются решениями уравнения

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ для всех действительных } x. \quad (25)$$

Ниже мы покажем, что если $f(x)$ непрерывна, то этому уравнению удовлетворяют только функции вида $f(x) = kx$. Если не накладывать требование непрерывности, то справедливость равенства $f(x) = kx$ можно утверждать лишь для рациональных чисел x (хотя определенные соотношения можно получить для всех x). Соответственно, достаточно требовать выполнения равенства (25) лишь для рациональных чисел x.

Мы изложим теорию Коши для решения функционального уравнения (25) в процессе обсуждения следующей задачи (которая непосредственно содержит это уравнение, но на множестве рациональных чисел).

Задача 10 (биологический факультет, 2005, июль). *Задана функция f, причем $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для всех рациональных чисел x, y. Известно, что $f(10) = -\pi$. Найдите $f\left(-\frac{2}{7}\right)$.*

Решим исходное функциональное уравнение

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ при всех } x, y \in \mathbf{Q}. \quad (26)$$

Прежде всего отметим, что функции вида $f(x)=kx$ (прямые пропорциональности) удовлетворяют этому уравнению. Докажем, что никаких других решений уравнение (26) не имеет.

Рассмотрим исходное функциональное уравнение при $y=0$:

$$f(x)=f(x)+f(0).$$

Отсюда следует, что $f(0)=0$.

При $y=-x$ уравнение (26) примет вид

$$f(0)=f(x)+f(-x),$$

откуда $f(-x)=-f(x)$.

Таким образом, всякое решение уравнения (26) является нечетной функцией.

Положим $y=x$. Это даст следующее соотношение:

$$f(2x)=2f(x) \text{ при всех } x\in\boldsymbol{Q}.$$

Используя это равенство, из (26) при $y=2x$ получим

$$f(3x)=f(x)+f(2x)=f(x)+2f(x)=3f(x) \text{ при всех } x\in\boldsymbol{Q}.$$

Аналогично, при $y=3x$ имеем

$$f(4x)=f(x)+f(3x)=f(x)+3f(x)=4f(x) \text{ при всех } x\in\boldsymbol{Q}.$$

Повторяя эту процедуру, мы получим, что для любого натурального n верно равенство (при $n=1$ оно является тождеством)

$$f(nx)=nf(x) \text{ при всех } x\in\boldsymbol{Q}. \qquad (27)$$

Строго это можно доказать методом математической индукции. Справедливость равенства (27) при $n=1$ (основание индукции) уже установлена. Допустим, что (27) верно для некоторого натурального k; докажем его справедливость для значения $n=k+1$:

$$f((k+1)x)=f(kx+x)=f(kx)+f(x)=$$
$$=kf(x)+f(x)=(k+1)f(x).$$

Из нечетности функции $f(x)$, которую мы установили в самом начале нашего решения, следует, что равенство (27) верно при всех целых n (а не только натуральных).

В принципе уже в этом месте мы можем решить исходную задачу в том виде, как она была поставлена на экзамене. Поскольку $10=(-35)\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)$, из (27) при $n=-35$, $x=-\frac{2}{7}$ имеем

$$f(10)=-35f\left(-\frac{2}{7}\right),$$

так что

$$f\left(-\frac{2}{7}\right)=-\frac{1}{35}f(10)=-\frac{1}{35}\cdot(-\pi)=\frac{\pi}{35}.$$

Но мы двинемся дальше и докажем, что на самом деле верно соотношение

$$f(rx)=rf(x) \text{ при всех } x\in\boldsymbol{Q}, \qquad (28)$$

где r – произвольное рациональное число.

Положим в (27) $x=\frac{t}{n}$:

$$f(t)=nf\left(\frac{t}{n}\right).$$

Отсюда $f\left(\frac{t}{n}\right)=\frac{1}{n}f(t)$, так что (28) справедливо для $r=\frac{1}{n}$. Если в этом равенстве положить $t=mx$, $m\in\boldsymbol{Z}$, то, используя (27), мы получим

$$f\left(\frac{m}{n}x\right)=\frac{1}{n}f(mx)=\frac{1}{n}mf(x)=\frac{m}{n}f(x),$$

т.е. (28) справедливо для любого рационального r.

В частности, при $x=1$ соотношение (28) даст

$$f(r)=rf(1).$$

Если обозначить $f(1)$ через k, а вместо переменной r использовать переменную x, то это соотношение можно записать в виде

$$f(x)=kx. \qquad (29)$$

Таким образом, если функция $f(x)$ является решением уравнения (26), то она дается формулой (29).

Теперь вернемся к исходной задаче (в том виде, как она была поставлена на экзамене). Так как

$$f(10)=k\cdot 10,$$

мы можем определить коэффициент пропорциональности k: $k=-\frac{\pi}{10}$. Поэтому $f(x)=-\frac{\pi}{10}\cdot x$ для рациональных x, и, в частности,

$$f\left(-\frac{2}{7}\right)=-\frac{\pi}{10}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)=\frac{\pi}{35}.$$

Отметим, что если уравнение (26) справедливо при всех *действительных* x и y, то дословное повторение проведенных рассуждений показывает, что равенство (28) будет выполнено при всех рациональных r и всех *действительных* x. Если дополнительно предположить непрерывность функции $f(x)$ во всех точках, то вывод о том, что $f(x)=kx$ (равенство (29)), будет справедлив при всех *действительных* x. Для доказательства нужно рассмотреть последовательность *рациональных* чисел $x_1, x_2, \ldots$, сходящуюся к x. Тогда

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=\lim_{n\to+\infty}(kx_n)=kx.$$

В связи с последним результатом было бы интересно построить функцию, удовлетворяющую уравнению (26) при всех действительных x и y, но не являющуюся прямой пропорциональностью. Конечно, такая функции должна быть разрывна. К сожалению, простого примера такой функции (вроде разрывной функции (17), которая наряду с линейными функциями (16) является решением уравнения (15) – см. первую часть статьи) построить нельзя.

В более сложных задачах уравнение (25) может быть «спрятано», и нужны определенные преобразования (обычно вводится новая неизвестная функция), чтобы свести дело к этому классическому уравнению. Именно эта ситуация возникает при решении следующей задачи.

Задача 11 (мехмат, устный экзамен, 2003). *Числовая функция для любых действительных чисел x, y удовлетворяет равенству*

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+80xy.$$

Найдите $f\left(\frac{4}{5}\right)$, *если* $f\left(\frac{1}{4}\right)=2$.

Исходное функциональное уравнение является неоднородным («лишним» является член $80xy$ в правой части). Как обычно, чтобы превратить его в однородное, найдем частное решение. Имея в виду сходство нашего уравнения с тождеством сокращенного умножения $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$, нетрудно догадаться, что $f_0(x) = 40x^2$ является решением.

Теперь введем новую неизвестную функцию $g(x) = f(x) - f_0(x)$. Для нее исходное функциональное уравнение примет вид

$$g(x+y) = g(x) + g(y) \text{ при всех } x, y \in \boldsymbol{R}.$$

В частности, это уравнение выполнено при всех рациональных x, y. Как было установлено при решении задачи 10, $g(x) = kx$ $(x \in \boldsymbol{Q})$. Поэтому можно утверждать, что при рациональных x $f(x) = 40x^2 + kx$. Условие $f\left(\frac{1}{4}\right) = 2$ позволяет определить коэффициент k: он равен -2, так что $f(x) = 40x^2 - 2x$ $(x \in \boldsymbol{Q})$. Таким образом,

$$f\left(\frac{4}{5}\right) = 40 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 2 \cdot \frac{4}{5} = 24.$$

Функциональная характеристика линейной функции

Изложенная выше теория Коши о функциональной характеристике прямой пропорциональности служит основой для решения уравнений, которые однозначно характеризуют более сложные виды функций.

Здесь мы рассмотрим вопрос о функциональной характеристике линейной функции. Существует несколько видов функциональных уравнений, решениями которых (при обычном условии непрерывности) являются все линейные функции и только они. При всем их разнообразии эти уравнения имеют общую основу: все они связаны с понятием выпуклости функции. Мы не будем развивать общую теорию, а проиллюстрируем ее основные особенности на примере такой задачи.

Задача 12 (химический факультет, 1999, апрель). *Функция $f(x)$ удовлетворяет следующему условию: для любых чисел a и b выполняется равенство*

$$f\left(\frac{a+2b}{3}\right) = \frac{f(a) + 2f(b)}{3}.$$

Найдите значение функции $f(1999)$, если $f(1) = 1$, $f(4) = 7$.

Для решения функционального уравнения, фигурирующего в тексте задачи, введем новую неизвестную функцию $g(x) = f(x) - f(0)$. Эта функция удовлетворяет равенству

$$g\left(\frac{a+2b}{3}\right) = \frac{g(a) + 2g(b)}{3} \qquad (30)$$

и дополнительному условию $g(0) = 0$, которое мы будем использовать позже.

Полагая в (30) $b = 0$, получим

$$g\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{1}{3} g(a), \quad a \in \boldsymbol{R}.$$

Если же в (30) заменить числом 0 переменную a, то мы получим

$$g\left(\frac{2b}{3}\right) = \frac{2}{3} g(b), \quad b \in \boldsymbol{R}.$$

Эти равенства позволяют выносить (и вносить) коэффициенты $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ за знак функции g. С их помощью можно дополнительно установить следующее свойство:

$$g(2b) = 3 \cdot \frac{1}{3} g(2b) = 3g\left(\frac{2b}{3}\right) = 3 \cdot \frac{2}{3} g(b) = 2g(b).$$

Итак, за знак функции g можно выносить и коэффициент 2.

С помощью этих свойств функции $g(x)$ функциональное уравнение (30) можно преобразовать следующим образом:

$$g\left(\frac{a+2b}{3}\right) = \frac{g(a) + 2g(b)}{3}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{1}{3} g(a+2b) = \frac{g(a) + 2g(b)}{3}$$
$$\Updownarrow$$
$$g(a+2b) = g(a) + 2g(b)$$
$$\Updownarrow$$
$$g(a+2b) = g(a) + g(2b).$$

Заменяя $2b$ на c, мы получим

$$g(a+c) = g(a) + g(c), \quad a, c \in \boldsymbol{R}.$$

Как мы доказали выше, общее решение этого уравнения для рациональных значений аргумента дается формулой

$$g(x) = kx.$$

Соответственно, общее решение исходного функционального уравнения для рациональных значений аргумента дается формулой

$$f(x) = f(0) + kx, \quad x \in \boldsymbol{Q}.$$

С помощью условий $f(1) = 1$, $f(4) = 7$ можно определить параметры $f(0)$ и k:

$$f(0) = -1, \quad k = 2,$$

что даст следующую конкретную линейную функцию:

$$f(x) = 2x - 1, \quad x \in \boldsymbol{Q}.$$

Теперь мы можем подсчитать искомую величину $f(1999)$: она равна 3997.

Отметим, что если дополнительно предположить непрерывность функции $f(x)$, то, как и для прямой пропорциональности, предельным переходом можно установить справедливость равенства $f(x) = f(0) + kx$ при всех действительных x.

Функциональная характеристика показательной функции

В качестве основы для функциональной характеристики показательной функции рассматривается тождество $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$. Следующая задача непосредственно содержит соответствующее этому тождеству функциональное уравнение (на множестве рациональных чисел)

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y). \qquad (31)$$

В процессе обсуждения этой задачи мы изложим теорию Коши для решения функционального уравнения (31).

Задача 13 (биологический факультет, 2005, июль). *Задана функция f, причем $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ для всех рациональных чисел x, y. Известно, что $f(4) = 16$. Найдите $f\left(-\frac{3}{2}\right)$.*

В общих чертах идея решения уравнения (31) заключается в его логарифмировании, что для $g(x) = \ln f(x)$ (основание логарифма не играет роли) дает уравнение $g(x+y) = g(x) + g(y)$. В силу задачи 10, можно утверждать, что $g(x) = kx$ при всех $x \in \boldsymbol{Q}$, что равносильно равенству $f(x) = e^{kx} \equiv a^x$ при всех рациональных x (здесь

$a = e^k$). Условие $f(4) = 16$ позволяет определить основание: $a^4 = 16 \Leftrightarrow a = 2$. Поэтому $f(x) = 2^x$ при всех рациональных x. В частности, $f\left(-\frac{3}{2}\right) = 2^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Однако все эти рассуждения работают, только если мы можем сделать первый шаг решения — прологарифмировать исходное уравнение. Для этого нужно доказать, что $f(x) > 0$ при всех (рациональных) x — это в действительности самая трудная часть задачи. Для доказательства положим в уравнении (31) $y = 4 - x$ (число x – произвольное): $f(x) \cdot f(4 - x) = f(4) = 16$. Отсюда следует, что $f(x)$ ни в одной точке не обращается в ноль. Далее, если в уравнении (31) заменить x и y на $\frac{x}{2}$, то мы получим, что $f(x) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$, откуда следует положительность $f(x)$ для всех (рациональных) x. Отметим, что проведенное рассуждение практически не изменится, если вместо условия $f(4) = 16$ предположить, что $f(x)$ отлична от нуля в какой-то точке x_0.

Если дополнительно к условию разобранной задачи предположить, что уравнение (31) выполнено при всех действительных x и что $f(x)$ непрерывна (и, конечно, сохранить условие, что $f(x)$ отлична от нуля хотя бы в одной точке), то тогда функция $g(x) = \ln f(x)$ определена, удовлетворяет уравнению $g(x + y) = g(x) + g(y)$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$ и непрерывна. Следовательно, $g(x) = kx$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$, и поэтому $f(x) = e^{kx} \equiv a^x$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$.

Функциональная характеристика логарифмической функции

Для логарифмической функций $y = \log_a x$ функциональной характеристикой служит функциональный аналог известного тождества $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$. Именно, справедливо такое утверждение:

Если функция $f(x)$ определена при всех положительных $x \in \boldsymbol{R}$, непрерывна на этом множестве, отлична от нуля хотя бы в одной точке $x_0 \neq 1$ и удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(xy) = f(x) + f(y), \quad x, y \in \boldsymbol{R}_+,$$

то существует положительное число a, не равное 1, такое что $f(x) = \log_a x$.

Для доказательства рассмотрим функцию $g(x) = f\left(e^x\right)$. Она определена при всех $x \in \boldsymbol{R}$ (так как $e^x > 0$), непрерывна (как композиция двух непрерывных функций) и, кроме того,

$$g(x + y) = f\left(e^{x+y}\right) = f\left(e^x \cdot e^y\right) = f\left(e^x\right) + f\left(e^y\right) = g(x) + g(y),$$

т.е. $g(x)$ удовлетворяет уравнению (26) при всех действительных x. Тогда $g(x) = kx$ для некоторого k.

Теперь можно найти $f(x)$. Если $x > 0$, то

$$f(x) = f\left(e^{\ln x}\right) = g(\ln x) = k \ln x.$$

Условие $f(x_0) \neq 0$ для некоторого положительного $x_0 \neq 1$ влечет, что $k \neq 0$. Тогда число $a = e^{1/k}$ положительно и не равно 1. Поэтому полученной формуле для $f(x)$ можно придать другой вид:

$$f(x) = k \ln x = \frac{\ln x}{\ln a} = \log_a x.$$

Функциональная характеристика тригонометрических функций

Доказанные утверждения о функциональной характеристике линейной, показательной и логарифмической функций являются прямыми следствиями основного результата о функциональной характеристике прямой пропорциональности. Как более интересный пример мы приведем функциональную характеристику функции $y = \cos x$ (так же, как и функциональная характеристика показательной и логарифмической функций, она была предложена Коши).

В качестве основы рассмотрим известное тригонометрическое тождество

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2\cos x \cdot \cos y.$$

Его функциональным аналогом будет уравнение

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) \cdot f(y), \quad x, y \in \boldsymbol{R}. \qquad (32)$$

На самом деле, этому уравнению удовлетворяют и другие функции. Прежде всего, это $f(x) \equiv 0$. Чтобы исключить этот тривиальный особый случай, мы дополнительно потребуем, чтобы в некоторой точке x_0 наша функция была отлична от 0.

Более интересным и совершенно неочевидным примером решения уравнения (32) будет функция $\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. (Эту функцию называют гиперболическим косинусом; она играет важную роль в геометрии Лобачевского, теории дифференциальных уравнений и других сложных разделах математики.) Действительно,

$$\operatorname{ch}(x + y) + \operatorname{ch}(x - y) = \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} + \frac{e^{x-y} + e^{-x+y}}{2} =$$
$$= \frac{e^x\left(e^y + e^{-y}\right) + e^{-x}\left(e^y + e^{-y}\right)}{2} = \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)\left(e^y + e^{-y}\right)}{2} =$$
$$= 2 \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} = 2\operatorname{ch}(x) \cdot \operatorname{ch}(y).$$

В силу неравенства для двух взаимно обратных положительных чисел, $\frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 1$ (причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $x = 0$), в то время как функция $\cos x$, принимает значения меньшие или равные 1. Поэтому, чтобы исключить из числа решений уравнения (32) функцию $\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, мы дополнительно предположим, что при всех x искомая функция меньше или равна 1.

Как и в других уравнениях Коши, мы предположим, что $f(x)$ непрерывна при всех x. Отметим также, что если $f(x)$ – решение уравнения (32), то $g(x) = f(ax)$ также является решением. Поэтому в число решений входят функции вида $\cos ax$, где a – некоторый параметр.

Оказывается, при сделанных предположениях никаких других решений уравнение (32) не имеет. Докажем это.

1) Положим в (32) $x = x_0$, $y = 0$:

$$2f(x_0) = 2f(x_0) \cdot f(0).$$

Поскольку $f(x_0) \neq 0$, отсюда следует, что

$$f(0) = 1. \qquad (33)$$

2) Положим в (32) $x = 0$:

$$f(y) + f(-y) = 2f(0) \cdot f(y).$$

Используя равенство (33), мы получим, что при всех y верно соотношение $f(y) = f(-y)$. Иначе говоря, функция $f(x)$ является четной.

3) Заменим в (32) x на nx и затем положим $y = x$:

$$f((n+1)x) = 2f(nx)\cdot f(x) - f((n-1)x).$$

Это рекуррентное соотношение позволяет однозначно найти $f((n+1)x)$, если известны значения $f(nx)$, $f((n-1)x)$ и $f(x)$. Поэтому, если мы знаем $f(x)$, то (поскольку $f(0)=1$ известно) мы можем последовательно подсчитать $f(2x), f(3x), \ldots$, а значит, в силу четности любого решения нашей задачи, и $f(-x), f(-2x), \ldots$

Отсюда следует важный вывод: если два решения $f(x)$ и $g(x)$ нашего уравнения совпадают в некоторой точке t, то они совпадают и во всех точках вида nt, $n \in \boldsymbol{Z}$ (аккуратное доказательство этого утверждения требует метода математической индукции).

4) При $y = x$ из (32) мы получим функциональный аналог известного тригонометрического тождества $\cos 2x + 1 = 2\cos^2 x$:

$$f(2x) + 1 = 2f^2(x). \qquad (34)$$

Из него, в частности, следует, что при всех x верно неравенство $f(x) \ge -1$ (в отличие от неравенства $f(x) \le 1$, его не нужно постулировать).

Заменим теперь в (34) x на $\frac{x}{2^n}$, где $n \in \boldsymbol{Z}$:

$$\left|f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| = \sqrt{\frac{1 + f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}{2}}. \qquad (35)$$

Если дополнительно предположить, что для всех n числа $f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ неотрицательны и значение $f(x)$ известно, то равенство (34) позволяет последовательно подсчитать все числа $f\left(\frac{x}{2^n}\right)$, $n \in \boldsymbol{N}$. Отсюда следует важный вывод: если два решения $f(x)$ и $g(x)$ нашего уравнения совпадают в некоторой точке t и при этом неотрицательны во всех точках вида $\frac{t}{2^n}$, $n \in \boldsymbol{N}$, то они совпадают и во всех этих точках (аккуратное доказательство этих утверждений требует применения метода математической индукции).

5) Поскольку $f(0) = 1$ и $f(x)$ непрерывна в точке 0, можно гарантировать, что на некотором отрезке $[-\varepsilon; +\varepsilon]$ (число $\varepsilon > 0$) функция $f(x)$ будет положительной. Действительно, в противном случае будет существовать последовательность чисел x_k, стремящихся к нулю, таких что $f(x_k) \le 0$. Тогда непрерывность $f(x)$ в точке 0 дает

$$f(0) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) \le 0,$$

что противоречит равенству $f(0) = 1$.

6) Неравенство $0 < f(\varepsilon) \le 1$ гарантирует, что существует $\alpha = \arccos f(\varepsilon)$, причем $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Это равносильно тому, что $f(\varepsilon) = \cos\alpha = \cos a\varepsilon$, где $a = \frac{\alpha}{\varepsilon}$. Иначе говоря, функции $f(x)$ и $g(x) = \cos ax$ совпадают в точке $x = \varepsilon$. В силу пункта 4 доказательства, они совпадают и во всех точках вида $\frac{\varepsilon}{2^n}$, $n \in \boldsymbol{N}$, а в силу пункта 3 доказательства, они совпадают и во всех точках вида $\frac{m\varepsilon}{2^n}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

7) Известно, что любое действительное число x можно получить как предел чисел вида $\frac{m\varepsilon}{2^n}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $m \in \boldsymbol{Z}$. Так как искомая функция $f(x)$ и функция $\cos ax$ непрерывны, это влечет их совпадение во всех точках.

Фрагменты изложенной теории являются основой решения следующей задачи.

Задача 14 (мехмат, устный экзамен, 2005). *Найдите наименьшее значение функции f, определенной на множестве натуральных чисел и удовлетворяющей равенствам*

$$f(1) = \cos 2, \qquad (36)$$

$$f(n+1) = f(n)\cdot\cos 1 - \sqrt{1 - (f(n))^2}\cdot \sin 1,\ \ n \in \boldsymbol{N}. \qquad (37)$$

Функциональное уравнение (37) позволяет найти $f(n+1)$, если известно значение $f(n)$. Поскольку мы знаем $f(1)$, мы можем последовательно подсчитать $f(2)$, $f(3)$, … Поэтому начнем решение с численного эксперимента: подсчитаем несколько первых членов последовательности $f(2)$, $f(3)$, … в надежде подметить какую-нибудь общую закономерность.

При $n = 1$ уравнение (37) вместе с начальным условием (36) дает

$$f(2) = \cos 2\cdot\cos 1 - |\sin 2|\cdot\sin 1 = \cos 2\cdot\cos 1 - \sin 2\cdot\sin 1 = \cos 3.$$

Подобным же образом из уравнения (37) при $n = 2$ мы имеем

$$f(3) = \cos 3\cdot\cos 1 - |\sin 3|\cdot\sin 1 = \cos 3\cdot\cos 1 - \sin 3\cdot\sin 1 = \cos 4.$$

Но на следующем шаге выкладки немного изменятся:

$$f(4) = \cos 4\cdot\cos 1 - |\sin 4|\cdot\sin 1 = \cos 4\cdot\cos 1 + \sin 4\cdot\sin 1 = \cos 3.$$

Для $f(5)$ имеем

$$f(5) = \cos 3\cdot\cos 1 - |\sin 3|\cdot\sin 1 = \cos 3\cdot\cos 1 - \sin 3\cdot\sin 1 = \cos 4.$$

Проделанные вычисления позволяют предположить, что $f(2k) = \cos 3$, а $f(2k+1) = \cos 4$, $k \in \boldsymbol{N}$. Эту гипотезу легко доказать методом математической индукции.

При $k = 1$ она сводится к уже установленным равенствам

$$f(2) = \cos 3,\ \ f(3) = \cos 4.$$

Допустим, что гипотеза истинна для некоторого значения k. Тогда из (37) при $n = 2k + 1$ мы имеем

$$f(2(k+1)) = f((2k+1)+1) =$$
$$= f(2k+1)\cdot\cos 1 - \sqrt{1-(f(2k+1))^2}\cdot\sin 1 =$$
$$= \cos 4\cdot\cos 1 - \sqrt{1-(\cos 4)^2}\cdot\sin 1 =$$
$$= \cos 4\cdot\cos 1 - \sqrt{(\sin 4)^2}\cdot\sin 1 = \cos 4\cdot\cos 1 - |\sin 4|\cdot\sin 1 =$$
$$= \cos 4\cdot\cos 1 + \sin 4\cdot\sin 1 = \cos(4-1) = \cos 3.$$

Аналогично,

$$f(2(k+1)+1) =$$
$$= f(2(k+1))\cdot\cos 1 - \sqrt{1-(f(2(k+1)))^2}\cdot\sin 1 =$$
$$= \cos 3\cdot\cos 1 - \sqrt{1-(\cos 3)^2}\cdot\sin 1 =$$
$$= \cos 3\cdot\cos 1 - \sqrt{(\sin 3)^2}\cdot\sin 1 = \cos 3\cdot\cos 1 - |\sin 3|\cdot\sin 1 =$$
$$= \cos 3\cdot\cos 1 - \sin 3\cdot\sin 1 = \cos(3+1) = \cos 4.$$

Таким образом, функция f принимает только три значения: $\cos 2, \cos 3, \cos 4$. Наименьшим из них, очевидно, является $\cos 3$.

(Продолжение см. на с. 45)

ФОНД ДМИТРИЯ ЗИМИНА «ДИНАСТИЯ»

при содействии

МЕЖДУНАРОДНОЙ ПРОГРАММЫ ОБРАЗОВАНИЯ В ОБЛАСТИ ТОЧНЫХ НАУК (ISSEP)

объявляет

Всероссийский конкурс «МОЛОДОЙ УЧИТЕЛЬ»

Победители Конкурса награждаются дипломами Фонда «Династия» и индивидуальными грантами на развитие творческой педагогической деятельности в размере 30 000 рублей, они получают возможность бесплатно участвовать в общероссийской конференции учителей-лауреатов Фонда «Династия», которая состоится летом 2007 года.

Обязательные условия для участия в конкурсе

1. Преподавание физики и/или математики в средней школе либо лицее, гимназии, производственно-техническом колледже на территории Российской Федерации.
2. Возраст до 30 лет (включительно) либо стаж работы в школе не более 5 лет на момент подачи документов.
3. Педагогическая нагрузка не менее 10 часов в неделю.

Документы, представляемые на конкурс

1. Анкета участника Конкурса (см. “Учительскую газету” от 24.10.2006 или “Первое сентября” от 11.11.2006).
2. Ксерокопия первой и второй страниц паспорта; заверенные руководителем учебного заведения справка о пед. нагрузке и копия трудовой книжки.
3. Конкурсная работа в форме эссе с описанием собственной концепции преподавания. В работе необходимо выразить свое мнение по следующим вопросам:
   - цели обучения физике (математике);
   - достоинства и недостатки существующих учебных программ и учебных пособий;
   - роль эксперимента в курсе физики (только для физиков);
   - значение олимпиад, кружков, летних школ и других видов дополнительного образования;
   - целесообразность изучения современных разделов физики (математики);
   - роль информатизации в образовании;
   - особенности преподавания для различных групп учащихся (одаренных детей, школьников, интересующихся теорией, прикладными вопросами, компьютерными технологиями, и других групп учащихся).

   Вы можете более подробно осветить те вопросы, которые Вам наиболее интересны, и вкратце ответить на остальные. Общий объем эссе не более 10 000 знаков. Работа представляется в печатном и (по возможности) электронном виде.

Все документы представляются в одном экземпляре. Нотариальное заверение копий не требуется. Организаторы оставляют за собой право не рассматривать заявки, оформленные без учета вышеприведенных требований.

Документы следует отправлять по адресу:

119234 Москва, а/я 590, конкурс «Молодой учитель».

Срок приема документов на конкурс продлен до **20 января 2007 года** (по почтовому штемпелю).

Справки о конкурсе:

Международная Программа Образования (ISSEP).Телефоны:(495) 939-3945,(495)939-3002, факс: (495) 939-4785

Интернет: www.dynastyfdn.ru **E-mail: dynasty@issep.rssi.ru**

Материалы вступительных экзаменов 2006 года

Московский физико-технический институт (государственный университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$8\sin^2 x\cos x - 3\sin 3x = 3\sin x - 2\cos x .$$

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{4x^3-3x+1}}{x-1} \le \sqrt{4x+10} .$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2}(3+2x) = 3y - x, \\ y^2 + 2xy = 3x^2 - 2y. \end{cases}$$

4. Пятиугольник $ABCDE$ описан около окружности. Известно, что $BC = CD$, $AE = DE$, $AB = 8$, $AD = 9$, $BD = 10$. Найдите радиус окружности, вписанной в пятиугольник, и угол CDE.

5. При каких значениях параметра t система

$$\begin{cases} (x+1-t)^2 + (y+1-3t)^2 = t^2, \\ (x-2)^2 + (y-5)^2 = 9 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

6. В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Сфера радиуса 2 с центром в плоскости AA_1D_1D касается плоскостей $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ и прямых AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Известно, что $A_1D_1 = 6$, $B_1C_1 = 1$. Найдите:

1) угол между прямыми CC_1 и AD;
2) двугранный угол между гранями CC_1D_1D и DD_1A_1A;
3) объем призмы.

Вариант 2

1. Найдите действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 5\sqrt[3]{4x^3y^4} = 4\left(x^2+y^2\right), \\ 3\sqrt[3]{2x^3y^2} = 2\left(x^2-y^2\right). \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\cos 3x\sqrt{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)} = \cos\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(4x+\frac{\pi}{4}\right).$$

3. Решите неравенство

$$\frac{2}{\log_{x-1}\left(12x-10-2x^2\right)} \le \frac{1}{2-\log_{10-2x}(x-1)} .$$

4. Треугольник ABC вписан в окружность O радиуса R, точка M – середина отрезка AC, отрезок AB равен R, угол BAC равен $\arcsin\dfrac{2}{3}$. Окружность O_1 проведена через точку M, касается окружности O и имеет с треугольником ABC единственную общую точку. Найдите радиус окружности O_1.

5. Для каждого значения параметра $a \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ найдите минимальное значение $g(a)$ функции $f(x,y) = x(x-2) + y(y-1)$ на множестве точек (x,y) таких, что $3\left(x^2+y^2\right) \le 2(x\cos a + y\sin a)$. Найдите значения параметра $a \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$, при которых $g(a)$ принимает наибольшее значение.

6. В треугольной пирамиде $ABCD$ сфера касается граней ACD и BCD в точках B_1 и A_1, являющихся основаниями высот пирамиды, и пересекает ребро AB в точках K и L. Известно, что $AB = 3\sqrt{2}$, $KL = 3\sqrt{\dfrac{6}{5}}$, $BC = 3\sqrt{\dfrac{11}{2}}$, $AD = 3\sqrt{7}$. Найдите расстояние между ребрами AB и CD, радиус окружности, высекаемой на сфере плоскостью ABC, и объем пирамиды $ABCD$.

Вариант 3

1. Решите уравнение

$$\frac{\operatorname{ctg}2x\operatorname{ctg}3x}{\operatorname{ctg}3x-\operatorname{ctg}2x} = \frac{\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x}{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}2x} .$$

2. Найдите действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2xz + \dfrac{3}{y} + 3 = 0, \\ yz + \dfrac{4}{x} - 2 = 0, \\ xy + \dfrac{2}{z} + 2 = 0. \end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{\frac{2|x|-x}{3}}\left(2x^2+3\right) + \frac{1}{\sqrt[3]{|x|}}} \le \log_{\frac{2|x|-x}{3}}\left(2x^2+3\right) .$$

4. В треугольнике ABC угол ACB прямой, $AB = 12$. Биссектриса угла ABC и медиана AP пересекаются в точке O. Окружность радиуса 3 с центром O пересекает сторону AB в точках K и L (L лежит между A и K), пересекает сторону BC в точках M и N (M лежит между B и N) и касается стороны AC в точке T. Найдите BC, угол MOL и CM.

5. Найдите все значения параметра b, при которых для любого значения параметра a существует тройка действительных чисел (x, y, z), удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} ax + 4y = z^2 + 1, \\ x + ay = z - b. \end{cases}$$

6. В пирамиде $SABC$ каждый из углов ASB и ASC равен $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{26}}$, угол BSC прямой, ребро SC равно a. Центр сферы, вписанной в пирамиду $SABC$, лежит на высоте SD.

Найдите SA, SD и радиус сферы, вписанной в пирамиду $SABC$.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Автомобиль тормозил с постоянным ускорением до полной остановки. Торможение заняло 4 с, а тормозной путь составил 20 м. Какова была скорость автомобиля на середине тормозного пути?

2. Астронавты, исследуя воздух открытой ими планеты, нагрели порцию воздуха массой m = 200 г на ΔT = 60 °С один раз при постоянном давлении, а другой раз – при постоянном объеме. Оказалось, что при постоянном давлении требуется подвести на 1 кДж тепла больше, чем при постоянном объеме. Найдите среднюю молярную массу воздуха, считая его идеальным газом.

3. Электрическая схема, изображенная на рисунке 1, состоит из двух одинаковых батарей с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r и резистора сопротивлением R. При подключении нагрузки к клеммам A и B схема эквивалентна батарее с некоторой ЭДС $\mathcal{E}_0$ и внутренним сопротивлением r_0 (т.е. для любой нагрузки при замене данной схемы на батарею с ЭДС $\mathcal{E}_0$ и внутренним сопротивлением r_0 ток в нагрузке не изменится). 1) Найдите ЭДС $\mathcal{E}_0$ и внутреннее сопротивление r_0 эквивалентного источника. 2) К клеммам A и B подключают резистор, сопротивление которого можно изменять. При каком значении этого сопротивления тепловая мощность, выделяемая в резисторе, будет максимальной?

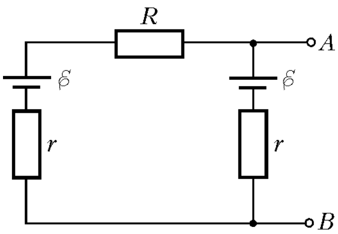


Рис. 1

4. Тонкая линза создает изображение предмета с некоторым увеличением. Оказалось, что для получения изображения с двукратным увеличением предмет нужно либо придвинуть к линзе на 3 см, либо отодвинуть от нее на 6 см. С каким увеличением изображался предмет вначале?

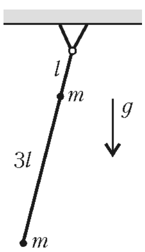


Рис. 2

5. Маятник представляет собой шарнирно прикрепленный к потолку жесткий легкий стержень длиной $4l$, на котором закреплены два маленьких груза массой m каждый, как показано на рисунке 2. Трением в шарнире и сопротивлением воздуха можно пренебречь. 1) Стержень отклоняют на угол $\varphi_0 = 60°$ от вертикали и отпускают без толчка. Найдите максимальную скорость движения нижнего груза. 2) Найдите период колебаний маятника при малых отклонениях от положения равновесия.

Вариант 2

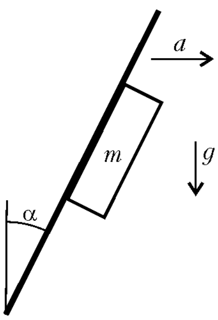


Рис. 3

1. Ровная шероховатая доска движется с постоянным горизонтальным ускорением a, сохраняя постоянный угол наклона α к вертикали, и толкает перед собой брусок массой m = 1 кг (рис.3). Оказалось, что при $a > g$ груз с доской движутся вместе без проскальзывания, а при $a < g$ груз падает вниз. Найдите коэффициент трения между доской и грузом, если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}2$.

2. С идеальным одноатомным газом проводят циклический процесс *1–2–3–1*, состоящий из расширения в процессе *1–2*, в котором теплоемкость газа остается постоянной, адиабатического расширения *2–3* и сжатия в процессе *3–1* с линейной зависимостью давления от объема. При этом $T_1 = T_2/2 = T_3$, $V_3 = 4V_1$. Найдите молярную теплоемкость газа в процессе *1–2*, если работа, совершенная газом в цикле, в 15 раз меньше работы, совершенной над газом в процессе *3–1*.

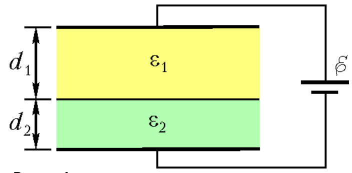


Рис. 4

3. Плоский конденсатор с площадью пластин S полностью заполнен двумя слоями диэлектрика с толщинами d_1 и d_2 и диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 соответственно (рис.4). Между обкладками конденсатора поддерживается постоянная разность потенциалов $\mathcal{E}$. Определите величину и знак связанного (поляризационного) заряда диэлектрика у верхней обкладки конденсатора.

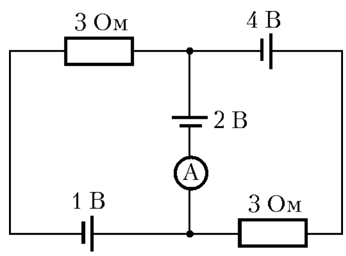


Рис. 5

4. В схеме на рисунке 5 все элементы можно считать идеальными. Значения ЭДС источников и сопротивлений резисторов указаны на рисунке. Определите величину и направление тока через амперметр.

5. Тонкая линза создает прямое изображение предмета с увеличением 3. Во сколько раз расстояние между предметом и изображением больше фокусного расстояния линзы?

Публикацию подготовили
Д.Александров, Р.Константинов, М.Шабунин

Московский государственный институт электроники и математики (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты электроники, информатики и телекоммуникаций, автоматики и вычислительной техники)

1. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 + x\right) \ge \log_{\frac{1}{2}}(x + 4).$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2x - 5} + x = 4.$$

3. Решите уравнение

$$\left(5x^2 - 8x - 4\right)\sqrt{2x - 1} = 0.$$

4. Найдите $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, если $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

5. В треугольнике ABC дано: $AB = 5$, $AC = 3\sqrt{5}$, угол A – тупой, площадь равна 15. Найдите BC.

6. Решите уравнение

$$\frac{3\cos 2x + 11\sin x - 6}{3\cos x - 2\sqrt{2}} = 0 .$$

7. Найдите множество значений функции

$$y = \frac{3^x + 5}{3^{|x|} + 1} .$$

8. Дана правильная треугольная пирамида, в основании которой лежит квадрат со стороной 3. Высота пирамиды равна 3. Через сторону основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

9. Найдите все значения a, при которых решением неравенства

$$ax + a^2 - 2a - 2 \geq \sqrt{-x^2 + x + 6}$$

является отрезок длины 1.

Вариант 2

(факультеты прикладной математики, экономико-математический)

1. Решите неравенство

$$\frac{x-2}{2x-3} \geq \frac{1}{x} .$$

2. Решите уравнение

$$\left|x^2 + x - 24\right| = 2x + 6 .$$

3. Решите неравенство

$$\log_5\left(-3x^2 - 2x + 1\right) \leq 0 .$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = x^2 - 3x - 2|x - 1|$$

на отрезке $[-2;\ 3]$.

5. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 и 15. Найдите расстояние от центра окружности, вписанной в треугольник, до высоты, опущенной на гипотенузу.

6. Решите уравнение

$$\log_{x^2}\left(2x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{9}{2}\right) = \frac{1}{2} .$$

7. Решите уравнение $3\sin 3x + 10\sin 2x = 24\cos x - 3\sin x$.

8. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 4; $SA = SC = \sqrt{13}$; $SB = \sqrt{21}$. Найдите расстояние между прямыми SC и AB.

9. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\log_4(3\cos 2x + \cos x + 1) = \log_4(a + 5\cos x)$$

имеет хотя бы одно решение.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Электрическая цепь состоит из двух резисторов с сопротивлениями $R_1 = 1{,}5$ кОм и $R_2 = 2{,}5$ кОм , соединенных последовательно. Напряжение на первом резисторе $U_1 = 30$ В . Определите напряжение на втором резисторе.

2. Определите период вращения искусственного спутника Земли, находящегося на орбите на высоте $h = 300$ км. Радиус Земли $R_З = 6{,}4 \cdot 10^6$ м . Суточное вращение Земли не учитывать.

3. При изохорном процессе, проводимом с идеальным газом, $\Delta p/\Delta T = 0{,}33$ кПа/К . Определите концентрацию молекул в этом газе. Постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К .

4. Тело движется со скоростью $v_1 = 6{,}0$ м/с и догоняет такое же тело, движущееся со скоростью $v_2 = 3{,}0$ м/с . Определите скорости тел после центрального абсолютно упругого удара.

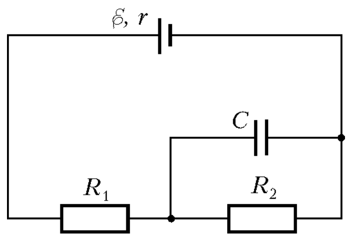
5. В декартовой системе координат задается положение двух зарядов: заряд $-q$ имеет координаты $(0,\ 0)$, заряд $+q$ – координаты $(a,\ 0)$. Запишите уравнение всех точек на плоскости, для которых потенциал электрического поля равен нулю.

Вариант 2

1. Санки массой $m = 2{,}0$ кг, находящиеся на горизонтальной поверхности, движутся под действием силы $F = 10$ Н, приложенной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Найдите силу, с которой тело давит на поверхность.

2. Два заряда $q_1 = 1{,}5$ нКл и $q_2 = -2{,}5$ нКл находятся в вершинах острых углов равнобедренного прямоугольного треугольника. Найдите напряженность в третьей вершине. Катет треугольника $a = 2{,}0$ см. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м .

3. Частица массой $m_1 = 3{,}0$ г , движущаяся со скоростью $v_1 = 5{,}0$ м/с , сталкивается с частицей массой $m_2 = 4{,}0$ г , движущейся со скоростью $v_2 = 3{,}0$ м/с . Они слипаются. Найдите энергию, выделившуюся при столкновении, если в момент столкновения скорости частиц направлены под углом $\alpha = 60^\circ$ друг к другу.



4. Найдите заряд на конденсаторе в схеме, изображенной на рисунке, если $R_1 = 14$ Ом , $R_2 = 15$ Ом , $C = 6{,}0$ пФ, $\mathscr{E} = 12$ В , $r = 1{,}0$ Ом.

5. Линейка массой m лежит на краю стола так, что одна четвертая ее часть выступает за край. К выступающему концу привязывают нить с укрепленным на ней грузом массой M. На какой минимальной угол надо отклонить нить с грузом, чтобы при его последующих качаниях конец линейки, лежащий на столе, мог приподняться?

Публикацию подготовили
Ю.Колмаков, Ю.Сезонов

Московский педагогический государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Вычислите $\left(25^{\log_7 2}\right)^{\log_5 49} + \sin 510^\circ$.

2. Найдите производную функции

$$f(x) = \sin 2{,}8x - e^{-2{,}8x} + \sqrt[3]{2{,}8} .$$

3. Высоту трапеции увеличили на 50%, а среднюю линию уменьшили на 10%. На сколько процентов изменилась площадь трапеции?

4. Решите неравенство

$$\log_2\left(6x - x^2 - 8\right) < \log_3\left(x^2 - 6x + 10\right) .$$

5. Решите уравнение

$$\sqrt{3}\left|\operatorname{tg} x\right| = \log_{\operatorname{ctg} x} \frac{\cos x}{\left|\sin x\right|}.$$

6. При каких значениях параметра a функция $f(x) = (a-3)x^2 - 2ax + 5a$ неотрицательна на всей области определения?

7. Решите уравнение

$$\frac{10x}{x^2 - x - 36} - \frac{32x}{x^2 - 7x - 36} - 1 = 0.$$

8. Найдите объем шара, описанного около конуса, если периметр осевого сечения конуса равен $18\sqrt{3}$, а площадь основания конуса равна 27π.

Вариант 2

(физический факультет)

1. Вычислите $\sqrt[3]{81 \cdot 5}\,\sqrt[3]{9 \cdot 25}$.

2. Найдите $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y$, если $\sin(x+y) = 7\sin(x-y)$.

3. Решите уравнение

$$x^2 + x \cdot 2^{\frac{1}{\log_6 2}} + \log_{0,5} 128 = 0.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{(x+2)\left(x^2 + x - 2\right)}{x+3} \geq 0.$$

5. Найдите абсциссу точки, в которой угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = 2x - \sqrt{x} + \cos\frac{\pi}{8}$ равен 1.

6. Решите уравнение $x^2 - 3x = \frac{2x^2}{x}$.

7. Решите неравенство $\sqrt{11+x} + 1 > x$.

8. В правильной треугольной пирамиде площадь основания равна $9\sqrt{3}$, а высота равна 8. Найдите расстояние от вершины основания до противоположной грани.

Вариант 3

(химический факультет)

1. Вычислите $200\left|\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}\right|$, если $\cos x = -0{,}7$.

2. Решите неравенство $6\log_{0,6} x + x^2 \log_{0,6} x \leq 0$.

3. Решите уравнение $x - \sqrt{26 - x^2} = 4$.

4. Найдите множество значений функции $f(x) = 5^{3x} - \pi$.

5. Найдите абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $f(x) = 2x - 6\cos x + 21$ параллельна прямой $y = 5x$.

6. Вычислите $4\log_3 6^{0,5} - \log_3 4$.

7. При каких значениях k трехчлен $(k-2)x^2 + 8x + k + 4$ положителен при всех значениях x?

8. В прямоугольном параллелепипеде площади граней равны 2, 3, 6. Найдите объем параллелепипеда.

Задачи устного экзамена

(математический факультет)

1. Выберите нибольшее из чисел tg 6, tg 7, tg 8.

2. Решите уравнение $\frac{\operatorname{ctg} x - 1}{\operatorname{tg} x - 1} + \sqrt{2}\cos x = 0$.

3. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 + ax = 3x + 3$ имеет единственное решение?

4. Решите неравенство

$$\frac{\left(0,5^x - 1\right)\left(0,5^x - 2\right)}{0,5^x - 4} \leq 0.$$

5. Решите неравенство

$$\log_{|x|} 4 + 5\log_{32} 0,5 \geq 0.$$

6. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = \log_2\left(10 - \sqrt{x+5}\right)$ на отрезке $[-1;\ 10]$.

7. Найдите множество значений функции

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2}.$$

8. Постройте график функции

$$y = \left|x^2 - 9|x| + 8\right|.$$

9. В прямоугольную трапецию вписана окружность радиуса 2. Найдите площадь трапеции, если одно из ее оснований равно 8.

10. Фигура, заданная на плоскости системой неравенств $|x| \leq y \leq 5$, вращается вокруг оси $0x$. Найдите объем полученного тела вращения.

Тест

(собеседование для медалистов, поступающих на математический факультет)

Выберите правильный ответ

1. Собрали 120 кг ягод, влажность которых составляла 99%. После сушки их влажность снизилась до 98%. Какова масса ягод после сушки:

а) 110 кг; б) 100 кг; в) 90 кг; г) 80 кг; д) 70 кг; е) 60 кг; ж) 50 кг; з) 40 кг?

2. Найдите остаток от деления 10^{10} на 7:

а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4; е) 5; ж) 6; з) 7.

3. Сколько корней имеет уравнение $10\sin x = x$:

а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4; е) 5; ж) 6; з) 7?

4. Найдите наибольшее целое значение функции $y = 10 \cdot 3^{3\sin^2 x + 2\cos^2 x - 4}$:

а) 0; б)1; в) 2; г) 3; д) 4; е) 5; ж) 6; з) 7.

5. Стороны треугольника равны 6 см, 8 см, 10 см. Найдите радиус вписанной окружности:

а) 0,5 см; б) 1 см; в) 1,5 см; г) 2 см; д) 2,5 см; е) 3 см; ж) 3,5 см; з) 4 см.

6. Через каждую вершину куба проведена плоскость, перпендикулярная диагонали куба, проходящей через эту вершину. Сколько вершин имеет многогранник, ограниченный всеми этими плоскостями:

а) 4; б) 6; в) 8; г) 10; д) 12; е) 14; ж) 16; з) 18?

ФИЗИКА

Физический факультет и факультет технологии и предпринимательства

Письменный экзамен

Экзаменационное задание состояло из двух частей. Первая часть содержала 15 вопросов с выбором из трех ответов. За каждый правильный ответ начислялся 1 балл. Вторая часть содержала 5 задач. Ответ засчитывался только при наличии решения и вычислений, за каждую полностью решенную задачу начислялись 2 балла. Сумма набранных баллов переводилась в оценку за экзамен.

На экзамене запрещалось использовать средства мобильной связи, но разрешалось пользоваться калькуляторами.

В экзаменационных заданиях были приведены значения всех физических констант и справочных данных, необходимых для решения задач.

Вариант 1

Часть 1. Выберите правильный ответ

1. От скалы откололся и стал свободно падать камень. Какую скорость он будет иметь через 3 с от начала падения:

1) 30 м/с; 2) 10 м/с; 3) 3м/с?

2. Вагонетка движется из состояния покоя с ускорением $0,5\ \text{м/с}^2$ в течение 10 с. Какова будет средняя скорость этого движения:

1) 2,5 м/с; 2) 5 м/с; 3) 0,5 м/с?

3. Длина корпуса судна на воздушной подушке массой 2 т составляет 10 м, ширина 4 м. Какое давление воздуха должен создать вентилятор, чтобы корпус судна мог висеть в воздухе:

1) 500 Па; 2) 80 Па; 3) 800 Па?

4. Из колодца глубиной 10 м достают ведро воды. Масса ведра 1,5 кг, масса воды 10 кг. Чему равна совершаемая при этом работа:

1) 1150 Дж; 2)1000 Дж; 3) 450 Дж?

5. Во сколько раз нужно уменьшить скорость тела, чтобы его кинетическая энергия уменьшилась в 2 раза:

1) 2; 2) 4; 3) $\sqrt{2}$?

6. Во сколько раз уменьшилась средняя квадратичная скорость теплового движения молекул идеального газа при уменьшении его абсолютной температуры в 4 раза:

1) 2; 2) 4; 3) 16?

7. При сжатии некоторого количества идеального газа его объем уменьшился в 2 раза, а температура увеличилась в 2 раза. Как изменилось при этом давление газа:

1) уменьшилось в 2 раза; 2) увеличилось в 4 раза; 3) не изменилось?

8. Два одинаковых металлических шарика с зарядами +3 мкКл и −1 мкКл находятся на некотором расстоянии друг от друга. Как изменится модуль силы взаимодействия между шариками, если их привести в соприкосновение, а затем раздвинуть на прежнее расстояние:

1) увеличится в 3 раза; 2) увеличится в 3/4 раза; 3) уменьшится в 3 раза?

9. Чему равна разность потенциалов между двумя точками, расположенными на одной силовой линии электрического поля напряженностью 100 В/м на расстоянии 5 см друг от друга:

1) 5 В; 2) 20 В; 3) 500 В?

10. Как изменится емкость конденсатора, если площадь пластин увеличить в 4 раза:

1) уменьшится в 4 раза; 2) увеличится в 4 раза; 3) увеличится в 2 раза?

11. С увеличением температуры сопротивление полупроводников:

1) увеличивается; 2) уменьшается; 3) не изменяется.

12. Как называется физическая величина, размерность которой можно записать как Дж/Кл:

1) электроемкость; 2) потенциал; 3) напряженность поля?

13. Расстояние от предмета до его изображения в плоском зеркале увеличилось с 1 м до 2 м. На сколько увеличилось расстояние от предмета до зеркала:

1) 1 м; 2) 2м; 3) 0,5 м?

14. Сколько протонов содержит ядро атома $^{21}_{12}\text{Mg}$:

1) 12; 2) 21; 3) 9?

15. Чему равна длина звуковой волны при частоте 200 Гц и скорости звука 340 м/с:

1) 0,59 м; 2) 68 км; 3) 1,7 м?

Часть 2. Решите задачи

16. Шайба скользит по горизонтальной поверхности льда с ускорением $-3\ \text{м/с}^2$. Чему равен коэффициент трения шайбы о лед?

17. С балкона, находящегося на высоте 20 м, упал мяч массой 0,2 кг. Чему равен импульс мяча у поверхности земли?

18. Тепловая машина с КПД 20% отдает холодильнику 80 Дж тепла. Чему равна полезная работа, совершаемая машиной?

19. Рассчитайте силу тока в замкнутой цепи, которая состоит из источника и двух параллельно соединенных резисторов сопротивлением 6 Ом каждый, если ЭДС источника равна 10 В, а его внутреннее сопротивление составляет 2 Ом.

20. Какая температура установится в сосуде, если смешать 2 кг воды с температурой 90 °С и 3 кг воды с температурой 20 °С?

Вариант 2

Часть 1. Выберите правильный ответ

1. Чему равна средняя скорость лыжника, прошедшего путь 18 км за 2 ч:

1) 0,25 м/с; 2) 2,5 м/с; 3) 10 м/с?

2. Движение материальной точки по окружности с постоянной по величине скоростью следует считать:

1) равноускоренным; 2) равномерным; 3) движением с переменным ускорением.

3. Тело массой 2 кг падает с ускорением $7\ \text{м/с}^2$. Сила сопротивления воздуха при этом составляет:

1) 14 Н; 2) 70 Н; 3) 6 Н.

4. Чему равна мощность двигателя автомобиля, если при силе тяги 1000 Н автомобиль движется со скоростью 72 км/ч:

1) 20 кВт; 2) 72 кВт; 3) 50 кВт?

5. Как изменится потенциальная энергия упруго деформированного тела при увеличении его деформации в 3 раза:

1) увеличится в 3 раза; 2) увеличится в 9 раз; 3) уменьшится в 3 раза?

6. В каком процессе количество теплоты, переданное газу, равно работе, совершаемой газом:

1) изотермическом; 2) изохорном; 3) адиабатном?

7. 10 л газа охлаждают на 200 °С до 27 °С при постоянном давлении. После охлаждения газ занял объем:

1) 2 л; 2) 4 л; 3) 6 л.

8. Чему равна величина электрического заряда, для перемещения которого в электрическом поле между точками с разностью потенциалов 10 В была совершена работа 5 Дж:

1) 2 Кл; 2) 50 Кл; 3) 0,5 Кл?

9. Емкость батареи, составленной из двух последовательно соединенных конденсаторов емкостью 4 мкФ каждый, равна:

1) 8 мкФ; 2) 2 мкФ; 3) 1 мкФ.

10. Какими носителями заряда создается ток в водном растворе щелочи:

1) ионами; 2) электронами и ионами; 3) электронами?

11. Как изменится мощность нагревательного прибора при уменьшении длины спирали вдвое, если напряжение питания не изменилось:

1) уменьшится в 2 раза; 2) увеличится в 2 раза; 3) уменьшится в 9 раз?

12. При изменении силы тока в катушке на 5 А за 0,1с в ней возникает ЭДС самоиндукции 20 В. Индуктивность катушки равна:

1) 0,4 Гн; 2) 2,5 Гн; 3) 1000 Гн.

13. Для того чтобы размер изображения, создаваемого собирающей линзой, был равен размеру предмета, предмет нужно расположить от линзы на расстоянии:

1) равном фокусному расстоянию; 2) в 2 раза меньше фокусного; 3) в 2 раза больше фокусного.

14. Как изменится кинетическая энергия электрона, вылетающего из вещества вследствие фотоэффекта, при увеличении длины волны света:

1) уменьшится; 2) увеличится; 3) не изменится?

15. Длина электромагнитной волны с периодом колебаний 0,03 мкс в воздухе равна:

1) 100 м; 2) 9 м; 3) 1 м.

Часть 2. Решите задачи

16. Найдите импульс фотона с длиной волны 0,4 мкм.

17. Мяч брошен под углом 30° к горизонту со скоростью 20 м/с. На какую высоту поднимется мяч? ($\sin 30^\circ = 1/2$.)

18. В пространстве между пластинами плоского горизонтального конденсатора неподвижно висит пылинка массой 10^{-9} г и зарядом $2 \cdot 10^{-17}$ Кл. Определите напряженность поля внутри конденсатора.

19. Две электрические лампы сопротивлениями 400 Ом и 100 Ом соединены параллельно и включены в сеть напряжением 220 В. Чему равна сила тока в сети?

20. Найдите удельную теплоемкость латуни, если на нагревание куска латуни массой 200 г от 12 °С до 16,4 °С потребовалось затратить 300 Дж тепла.

Публикацию подготовили
Е.Деза, С.Жданов, Б.Кукушкин, В.Сёмаш

Функциональные уравнения и неравенства

(Начало см. на с. 34)

Упражнения

1 (ВМК, устный экзамен, 1997). Существует ли линейная функция $y = f(x)$, удовлетворяющая для всех действительных x соотношению

$$2f(x+2) + f(4-x) = 2x + 5\ ?$$

2 (ВМК, устный экзамен, 1997). Существует ли квадратичная функция $y = f(x)$, удовлетворяющая при всех x соотношению

$$f(x+1) + f(2-x) = (x+1)^2\ ?$$

3 (ВМК, устный экзамен, 1996). Найдите функцию $y = f(x)$, удовлетворяющую при всех $x \neq 0$ соотношению

$$f(x) + 3x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x^2\ .$$

4 (химический факультет, 2001, июль). Функция $f(x)$ для всех x удовлетворяет уравнению

$$f(x+1) = f(x) + 2x + 1\ .$$

Найдите $f(2001)$, если $f(0) = 0$.

5 (ВМК, устный экзамен, 2002/олимпиада Болгарии, 1968). Найдите все функции $f(x)$, удовлетворяющие тождеству

$$x \cdot f(y) + y \cdot f(x) \equiv (x+y) \cdot f(x) \cdot f(y)$$

для любых $x, y \in (-\infty; +\infty)$.

6 (биологический факультет, 2005, июль). Задана функция f, причем $f(x-y) = f(x) - f(y)$ для всех рациональных чисел x, y. Известно, что $f(6) = -\sqrt{3}$. Найдите $f\left(-\frac{5}{4}\right)$.

7 (биологический факультет, 2005, июль). Задана функция f, причем $f(x-y) = \dfrac{f(x)}{f(y)}$ для всех рациональных чисел x, y. Известно, что $f(3) = 27$. Найдите $f\left(-\frac{5}{2}\right)$.

8 (мехмат, устный экзамен, 2005). Функция f с областью определения $\boldsymbol{Z}$ удовлетворяет равенствам

$$f(1) = \cos 1\ ,\quad f(n+1) = f(n) \cdot \cos 1 - \sin n \cdot \sin 1\ ,\quad n \in \boldsymbol{Z}\ .$$

Для любого ли натурального (целого) n верно неравенство $f(n) > -1$?

ИНФОРМАЦИЯ

Очередной набор в ОЛ ВЗМШ

Открытый лицей «Всероссийская заочная многопредметная школа» (ОЛ ВЗМШ) Российской академии образования, работающий при Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова, в сорок третий раз проводит набор учащихся.

ОЛ ВЗМШ – государственное учреждение дополнительного образования, причем не только для школьников. «ОТКРЫТЫЙ» – значит доступный для всех желающих пополнить свои знания в одной или нескольких из следующих областей науки: математика, биология, филология, физика, экономика, химия, правоведение, история, информатика (перечисление – в хронологическом порядке открытия отделений).

Сейчас ОЛ ВЗМШ совместно с другими научно-педагогическими учреждениями ведет исследовательские работы по разработке новых интерактивных технологий в образовании и переводу части своих учебно-методических комплексов на язык современных телекоммуникаций, в частности – по организации Интернет-отделения ОЛ ВЗМШ.

За время существования ВЗМШ удостоверения о ее окончании получили несколько сотен тысяч школьников и тысячи кружков – групп «Коллективный ученик ВЗМШ».

Обучение в школе ЗАОЧНОЕ, т.е. начиная с сентября-октября 2007 года все поступившие будут систематически получать специально разработанные для заочного обучения материалы, содержащие изложение теоретических вопросов, методов рассуждений, разнообразные задачи для самостоятельной работы, образцы решений задач, деловые игры, контрольные и практические задания.

Контрольные работы учащихся будут тщательно проверяться и рецензироваться преподавателями ВЗМШ – студентами, аспирантами, преподавателями и научными сотрудниками МГУ, а также других вузов и учреждений, где имеются филиалы школы. Многие из преподавателей в свое время сами закончили ВЗМШ и поэтому особенно хорошо понимают, как важно указать, помимо конкретных недочетов, пути ликвидации имеющихся пробелов в знаниях, порекомендовать дополнительную литературу, поругать за невнимательность и похвалить за заметный (а иногда – и за самый маленький) прогресс и трудолюбие.

Поступившие в ОЛ ВЗМШ смогут узнать об увлекательных вещах, часто остающихся за страницами школьного учебника, познакомиться с интересными нестандартными задачами и попробовать свои силы в их решении. Для многих станет откровением, что задачи бывают не только в математике, физике и химии, но и в биологии, филологии, экономике и других науках. Решение задач поможет прояснить, сделать интересными многие разделы, казавшиеся непонятными и скучными.

Одна из особенностей учебных программ и пособий ВЗМШ – в том, что они созданы действующими на переднем крае науки талантливыми учеными и опытными незаурядными педагогами (часто эти два качества совмещаются в одном и том же человеке). Недаром на X Всемирном конгрессе по математическому образованию, который прошел летом 2004 года в Дании, рассказ о 40-летней работе математического отделения ОЛ ВЗМШ вызвал неподдельный интерес и одобрение участников.

Чтобы успешно заниматься в заочной школе, вам придется научиться самостоятельно и продуктивно работать с книгой, грамотно, четко, коротко и ясно излагать свои мысли на бумаге и других носителях информации, а это, как известно, умеют далеко не все. Возможно, наша заочная школа поможет вам выбрать профессию, найти свое место в окружающем мире.

Все выполнившие программу ОЛ ВЗМШ получают соответствующие дипломы. Хотя формальных преимуществ они не дают, приемные комиссии многих вузов учитывают, что обладатели этих удостоверений в течение продолжительного времени самоотверженно трудились над приобретением знаний, научились самостоятельно творчески работать, а это значит, что из них получатся хорошие студенты и, в дальнейшем, грамотные, вдумчивые, широко образованные специалисты.

Если у вас имеется такая возможность, вы будете частично общаться с нашей школой с помощью Интернета – чем дальше, тем больше.

Для поступления в ОЛ ВЗМШ надо успешно выполнить вступительную контрольную работу. Приемную комиссию интересует, в первую очередь, ваше умение рассуждать, попытки (пусть поначалу не совсем удачные) самостоятельно мыслить и делать выводы. Преимуществом при поступлении пользуются проживающие в сельской местности, поселках и небольших городах, где нет крупных научных центров и учебных заведений и где получить дополнительное образование можно лишь заочно.

Решения задач вступительной работы надо написать на русском языке в обычной ученической тетради в клетку (на некоторые отделения – на открытке или на двойном тетрадном листе, см. ниже). Желающие поступить сразу на несколько отделений каждую работу присылают *в отдельной тетради*. На обложке тетради укажите: *фамилию, имя, отчество, год рождения, базовое образование* (сколько классов средней школы будет закончено *к сентябрю 2007 года*), *полный почтовый адрес* (с индексом), *откуда узнали об ОЛ ВЗМШ* (из «Кванта», от друзей, из афиш заочной школы и т.п.), *на какое отделение хотите поступить.*

Вступительные работы обратно не высылаются.

Без вступительной работы, только по заявлению, принимаются на индивидуальное обучение победители областных (краевых, республиканских) туров всероссийских олимпиад по соответствующим предметам, а также участники финальных туров этих олимпиад (не обязательно участие в самых последних олимпиадах).

Учащиеся ОЛ ВЗМШ частично возмещают расходы на свое обучение. Плата невелика, на каждом отделении своя. По просьбе тех, кто не в состоянии внести эту плату, ОЛ ВЗМШ готов обратиться по любому адресу – в школу, в орган народного образования, к другому спонсору – с ходатайством об оплате этим благотворителем соответствующих расходов.

Помимо индивидуального обучения, на всех отделениях ВЗМШ, кроме экономического, биологического и информатики, имеется еще одна форма – «Коллективный ученик». Это группа учащихся, работающая под руководством преподавателя (школьного учителя, преподавателя вуза, студента или другого энтузиаста), как правило, по тем же пособиям и программам, что и индивидуально. *Прием в эти группы проводится до 15 октября 2007 года.* Для зачисления группы требуется заявление ее руководителя (с описанием его профессии и должности, со списком учащихся и четким указанием, в каком классе они будут учиться с сентября 2007 года); заявление должно быть подписано руководителем группы, заверено и подписано руководителем учреждения, при котором будет работать группа. Работа групп «Коллективный ученик» может оплачиваться школами как факультативные занятия.

На Северо-Западе России работает Заочная школа Ленинградского областного Министерства образования, созданная при Санкт-Петербургском университете и имеющая отделения математики, биологии и химии.

Проживающие на Северо-Западе России (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми республиках), желающие поступить на отделение математики, высылают вступительные работы по адресу: 198097 Санкт-Петербург, ул. Трефолева, д. 32, Северо-Западная ЗМШ (на прием).

Проживающие в остальных регионах России, дальнем и ближнем зарубежье высылают свои работы в адрес ОЛ ВЗМШ или (по математике) соответствующего филиала.

Адрес ОЛ ВЗМШ: 119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ОЛ ВЗМШ, на прием (с указанием отделения)
Телефон: (495) 939-39-30

Филиалы математического отделения ОЛ ВЗМШ имеются:

• при университетах – в городах Донецк (Украина), Екатеринбург, Иваново, Майкоп, Ульяновск, Челябинск, Ярославль;

• при педагогическом институте в городе Кирове;

• при Брянском центре технического творчества молодежи.

Ниже вы найдете краткие сведения о каждом отделении ОЛ ВЗМШ и условия вступительных контрольных заданий.

Отделение математики

Из этого отделения, открывшегося в 1964 году, выросла вся заочная школа (вначале она так и называлась – математическая).

За время обучения вы более глубоко, чем в обычной школе, сможете осознать основные идеи, на которых базируется курс элементарной математики, познакомиться (по желанию) с некоторыми дополнительными, не входящими сейчас в школьную программу разделами, а также поучиться решать олимпиадные задачи. На последнем курсе большое внимание уделяется подготовке к сдаче школьных выпускных экзаменов и вступительных экзаменов в вузы.

На отделении созданы учебно-методические комплексы, приспособленные для заочного обучения. Часть из них издана массовым тиражом. Осуществляется перевод уже апробированных и вновь создаваемых материалов на электронный язык в интерактивном режиме, отделение готовится к работе в Интернете. Практически каждый год издаются и «проходят обкатку» новые пособия, расширяющие и дополняющие программу обучения.

Окончившие отделение математики получат, в зависимости от желания и способностей, либо подготовку, необходимую для выбора математики как профессии, либо математическую базу для успешного усвоения вузовского курса математики, лежащего в основе профессиональной подготовки по другим специальностям: ведь сейчас математика служит мощным инструментом исследований во многих отраслях человеческой деятельности. Поступившие в этом году на первый курс смогут выбирать новые пособия, разработанные для будущих физиков и биологов, химиков и историков…

Обучение длится 5 лет. Можно поступить на любой курс. Для этого к сентябрю 2007 года надо иметь следующую базу: на 1-й курс – 6 классов средней школы, на 2-й курс – 7 классов, на 3-й – 8, на 4-й – 9, на 5-й – 10 классов. При этом поступившим на 2-й, 3-й и 4-й курсы будет предложена часть заданий за предыдущие курсы. Для поступивших на 5-й курс обучение проводится по специальной интенсивной программе с упором на подготовку в вуз.

Для поступления надо решить хотя бы часть задач помещенной ниже вступительной работы (около номера каждой задачи в скобках указано, учащимся каких классов она предназначена; впрочем, можно, конечно, решать и задачи для более старших классов). На обложке тетради напишите, на какой курс вы хотите поступить.

Срок отправки вступительной работы – до 15 апреля 2007 года.

Группы «Коллективный ученик» (на все курсы по любой программе) принимаются без вступительной работы.

Задачи

1 (6–10). Одновременно начинают бить 3 колокола. Первый бьет с интервалом между ударами $4/3$ секунды, второй – $5/3$ секунды, а третий – 2 секунды. Совпадающие по времени удары колоколов воспринимаются как один удар. Сколько ударов будет услышано за 1 минуту, считая первый и последний?

2 (6–10). Каково наибольшее возможное отношение пятизначного числа к сумме его цифр?

3 (8 – 10). Пусть AD и BE – медианы треугольника ABC, O – точка их пересечения, а площадь треугольника ABC равна S. Найдите площадь четырехугольника $CDOE$.

4 (6–10). Имеется 80 автомашин и мотоциклов, причем 3 мотоцикла – с колясками (у них 3 колеса), а остальные – без колясок. Все эти агрегаты имеют вместе 279 колес (без учета запасных). Сколько среди них автомашин?

5 (7–10). Известно, что x, y, z – целые числа и что

$$\frac{1}{x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}}=\frac{7}{17}.$$

Найдите x, y и z.

6 (9–10). Найдите углы ромба, сторона которого есть среднее геометрическое между его диагоналями (т.е. квадрат стороны ромба равен произведению его диагоналей).

7 (6–10). Даны три различные цифры. Из них можно составить шесть двузначных чисел без повторяющихся цифр. Если сложить все эти числа, получится 528. Найдите цифры.

8 (6–10). Пусть стороны прямоугольника – целые числа, а его периметр и площадь равны одному и тому же числу. Найдите все такие прямоугольники.

9 (7–10). Разложите на множители выражение $x^8 + x^7 + 1$.

10 (8–10). Найдите сумму цифр всех целых чисел от 1 до $10^n - 1$.

11 (8–10). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 - 2x^3 + x = y^2 - y, \\ y^4 - 2y^3 + y = x^2 - x. \end{cases}$$

12 (7–10). Чему мог равняться угол между часовой и минутной стрелками часов, если его величина повторилась ровно через 30 минут?

Отделение биологии

Набор объявляется в 34-й раз. Зачисление проводится на конкурсной основе по результатам вступительной работы. В конкурсе могут принять участие школьники, которые в этом учебном году занимаются в 8 или 9 классе, независимо от места проживания. Обучение в первом случае длится 3 года, во втором – 2 года.

Учащимся восьмых классов необходимо решить задачи 1–5 помещенной ниже вступительной работой, учащимся девятых классов – задачи 3–7.

В ответах можно использовать и факты, найденные в литературе, и собственные идеи. Просим для сведений, почерпнутых из книг, приводить ссылки на источники.

Вместе с работой пришлите конверт с маркой и заполненным адресом (для отправки вам решения Приемной комиссии).

Срок отправки вступительной работы – до 15 мая 2007 года.

Задачи

1. Перед вами – перечень грибов: дождевик, мукор, мухомор, опенок, пеницилл, подосиновик, сморчок, спорынья, трутовик. Предложите как можно больше признаков, по которым их можно разделить на две группы так, чтобы в каждой группе оказалось не меньше двух организмов. Для каждого признака укажите, какие грибы в какую группу попадут.

2. Существует множество примет, позволяющих на основании жизнедеятельности животных или растений предсказывать погоду на ближайшие дни либо давать более долгосрочные прогнозы. Хотя приметы не всегда сбываются, эффективность многих из них довольно высока. Объясните, как связаны наблюдаемые признаки с ожидаемыми природными явлениями, рассмотрев различные народные приметы или придумав приметы самостоятельно.

3. Наряду с химическими средствами защиты культурных растений используются биологические – живые организмы, выпуск которых на поля (сады, огороды) тем или иным способом приводит к повышению урожая или улучшению качества сельскохозяйственной продукции. Предложите разные способы, которыми биологические средства защиты растений могут вызывать эти эффекты. Постарайтесь для каждого из указанных вами способов привести по одному-два примера его реализации.

4. Как вы думаете, почему у животных рваные раны заживают лучше резаных, а у растений – наоборот?

5. Существует множество лекарств, используемых для достижения одного и того же физиологического эффекта: потогонные, мочегонные, кровоостанавливающие, жаропонижающие и др. Нужно ли все это разнообразие? Давайте попробуем для каждого эффекта выбрать лучший препарат. Составьте план подобного исследования, объяснив, какие характеристики лекарств вы будете сравнивать. Как вы думаете, удастся ли для достижения каждого физиологического эффекта выбрать единственный препарат и отказаться от всех остальных аналогичных лекарств? Ответ обоснуйте.

6. Представим себе фантастическую мутацию, когда у человека при сохранении размеров тела и всех его органов в несколько раз уменьшаются размеры составляющих их клеток – т.е. тот же объем заполнен бóльшим числом клеток. Как вы думаете, к каким последствиям приведет эта мутация? (Если для каких-то из ваших идей существенно, уменьшились ли клетки во всех трех измерениях или нет, рассмотрите оба варианта.)

7. От чего зависит время жизни тех или иных клеток человека или другого многоклеточного организма? Объясните, что может вызывать необходимость их гибели и когда она происходит. Постарайтесь предложить как можно больше вариантов ответа.

Отделение физики

Отделение работает 15 лет. Обучение одно-, двух- и трехгодичное. На трехгодичный поток принимаются оканчивающие в 2007 году 8 классов средней школы, на двухгодичный – 9 классов и на одногодичный – 10 классов. Для поступления на трехгодичный поток нужно решить задачи 1–5 приведенной ниже вступительной работы, на двухгодичный поток – задачи 4–9 и на одногодичный – задачи 5–10. Индивидуальные учащиеся, оканчивающие 10 класс, могут пройти программу двухгодичного потока за один год, тогда нужно написать «10+11» на обложке тетради и решать задачи 4–10.

Срок отправки вступительной работы – до 1 июня 2007 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются в 9, 10 и 11 классы без вступительной работы, только по заявлению руководителя.

Адрес отделения в Интернете: http://phys.problems.ru

Задачи

1. Турист проплыл на катере вниз по реке от одной пристани до другой, после чего сразу пересел в лодку и вернулся обратно. Средняя скорость туриста составила $v_1 = 12$ км/ч. В другой раз он проделал первую половину пути на лодке, а вернулся на катере, при этом средняя скорость туриста оказалась равной $v_2 = 15$ км/ч. Найдите скорости катера и лодки относительно воды, если скорость течения реки u = 2 км/ч.

2. В сосуд с теплой водой опускают тело объемом V, внутри которого имеется полость объемом $2V/3$, заполненная льдом. Тело вначале погружается на $5/6$ своего объема. Лед начинает медленно таять, при этом полость сообщается с водой в сосуде через маленькое отверстие в теле. Утонет ли тело, когда весь лед растает?

3. На цоколе одной из ламп написано 30 В, 15 Вт, а на цоколе другой написано 80 В, 40 Вт. Спирали ламп сделаны из одного материала и отличаются только длиной. Лампы соединяют последовательно и подключают к источнику постоянного напряжения U = 110 В, при этом в лампах выделяется суммарная мощность P = 50 Вт. Найдите, во сколько раз при таком подключении сопротивление каждой лампы отличается от сопротивления при работе лампы в режиме, на который она рассчитана.

4. Два жука, находящиеся в вершинах A и C квадрата $ABCD$, начинают ползти вдоль сторон этого квадрата по часовой стрелке. Скорости жуков одинаковы. Нарисуйте траекторию одного из жуков в системе отсчета, связанной с другим жуком.

5. Солнечные лучи падают на собирающую линзу с фокусным расстоянием $F_1 = 10$ см через круглое отверстие в непрозрачном экране. За линзой на расстоянии l = 40 см от нее установлен второй экран, радиус светового пятна на нем r = 12 см. Каким окажется радиус этого пятна, если посередине между линзой и вторым экраном поставить еще одну линзу с фокусным расстоянием $F_2 = 20$ см ?

6. К концам нити, переброшенной через блок, привязаны два тела массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг. Тела удерживают так, что первое находится на $\Delta h = 1$ м ниже второго. В некоторый момент тела отпускают. Спустя какое время расстояние между телами по вертикали снова станет равным 1 м, если известно, что в момент, когда тела оказались на одной высоте, нить оборвалась? Блок и нить идеальные.

7. Тело, брошенное в горизонтальном направлении, должно упасть на землю не ближе L = 10 м по горизонтали от места бросания. С какой высоты нужно произвести бросок, чтобы скорость тела при падении на землю была минимальной?

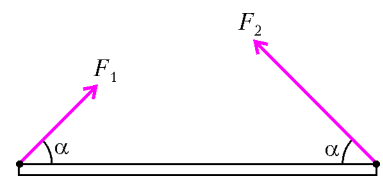


Рис. 1

8. К концам палочки длиной L = 20 см приложены силы $F_1 = 1$ Н и $F_2 = 2$ Н, направленные под углом $\alpha = 45°$ к палочке (рис.1). С какой силой F нужно подействовать на эту палочку, чтобы она оставалась в равновесии? Куда должна быть приложена эта сила?

9. По столу может ездить тележка массой M, к которой с помощью идеальной пружины жесткостью k прикреплен брусок массой m (рис.2). В начальный момент тела покоятся, а пружина сжата на величину ΔL. Какой будет максимальная скорость бруска относительно тележки, если систему предоставить самой себе? Трением между бруском и тележкой пренебречь.

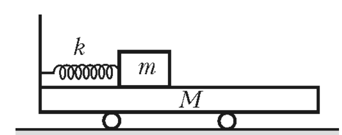


Рис. 2

10. Над молем одноатомного идеального газа проводят цикл *1–2–3–1*, изображенный на p–T-диаграмме (рис.3). Начальные давление и температура газа равны p_1 и T_1 соответственно, температура газа в точке *2* равна $T_2 = 1,5T_1$. Найдите работу газа за цикл и КПД тепловой машины, работающей по такому циклу.

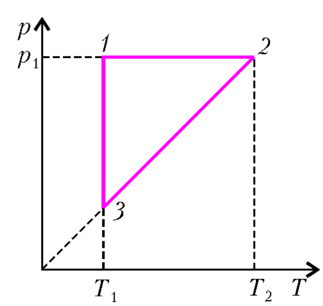


Рис. 3

Отделение химии

Отделение открылось 13 лет назад. На отделение принимаются учащиеся, имеющие базовое образование в объеме 8, 9 и 10 классов средней школы.

Полная программа обучения на отделении – три года.

Программа включает следующие одногодичные курсы:
– общая химия (с элементами неорганической химии);
– неорганическая химия;
– органическая химия;
– химия окружающей среды (полгода).

Если вы хотите научиться решать задачи, вам будет полезен курс «Методы решений задач по химии». Его можно совмещать с другими курсами.

Более подробные сведения о программе и порядке обучения высылаются вместе с извещением о решении Приемной комиссии.

Задачи вступительной работы, помещенные ниже, – общие для всех поступающих, независимо от базового образования.

Срок отправки вступительной работы – до 15 июня 2007 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы, только по заявлению руководителя.

Задачи

1. Запишите уравнения, описывающие поведение следующих солей в водных растворах: а) Na_2SiO_3; б) $MgOHCl$; в) $NH_4Al(SO_4)_2$; г) $CrClSO_4$; д) KH_2AsO_4.

2. Неизвестный газ имеет плотность по гелию 20,25. Предположите, основываясь на расчете, что это за газ. Постарайтесь найти все возможные решения этой задачи.

3. Какие вещества получаются при взаимодействии с водой: а) $SOBr_2$; б) NCl_3; в) BrF_5; г) Na_2C_2; д) Mg_2Si? Напишите уравнения соответствующих реакций.

4. 32,0 г серы сожгли в 16,8 л кислорода. Продукт сгорания пропустили через 200 г 20%-го раствора гидроксида натрия. Найдите массы всех компонентов раствора.

5. Цитраль (болеутоляющее и противовоспалительное средство) представляет собой 3,7-диметилоктадиен-2,6-аль. Изобразите структурную формулу цитраля и формулы возможных продуктов его взаимодействия: а) с HBr; б) с $Ag[(NH_3)_2]OH$.

Отделение филологии

Отделение существует с 1989 года. За это время подготовлено и издано большое количество уникальных учебных пособий по русскому языку, общему языкознанию, истории и теории литературы.

Принимаются все желающие, имеющие базовую подготовку в объеме 8 классов.

Отделение предлагает на выбор 15 учебных программ.

Вы хотите исправить грамотность? Познакомиться с любопытными проблемами теории и практики русского языка? Освоить приемы лингвистического или литературоведческого анализа? Научиться говорить по-английски и понимать английскую речь? Узнать кое-что о журналистике и оценить свои творческие способности? Приобрести навыки, необходимые для успешной сдачи экзаменов в вуз? Тогда пришлите нам вступительную работу – ответы на вопросы помещенного ниже теста.

Внимание! Отвечайте на вопросы теста на двойном тетрадном листе. На первой странице укажите важные для нас данные: Ф.И.О., какой класс заканчиваете, полный (с индексом!) почтовый адрес, телефон (если есть). Затем *полностью перепишите условия теста* и *выполните задания 1 – 5* (впишите или подчеркните нужное, расставьте соответствующие цифры).

Тест

1. Впишите нужное

К 1 сентября 2007 года я закончу __ класс.
Моя средняя оценка:
по русскому языку __;
по литературе __.

2. Подчеркните нужное

Моя грамотность:
а) абсолютная;
б) вполне приличная;
в) так себе;
г) низкая.

3. Расставьте цифры от 1 до 8 в соответствии с тем, насколько для вас важны следующие задачи (1 – самое важное; 8 – наименее важное):

__узнать как можно больше об устройстве русского языка;
__узнать как можно больше о русской литературе;
__научиться хорошо и логично выражать свои мысли в сочинении;
__писать грамотнее;
__узнать больше об устройстве языков мира;
__узнать больше о том, что за наука – литературоведение;
__научиться читать и говорить на английском языке;
__попробовать свои силы в журналистике.

4. Подчеркните нужное

Надеюсь, что учеба на филологическом отделении ОЛ ВЗМШ даст мне возможность:
а) удовлетворить свое природное любопытство;
б) заняться в свободное время тем, что мне интересно;
в) исправить школьные оценки по русскому языку и литературе;
г) приобрести знания и навыки, необходимые для успешной сдачи экзаменов в вуз.

5. Подчеркните нужное

Скорее всего, я буду поступать в вуз:
а) на филологическую специальность, где пишут сочинение и сдают русский устно;
б) на гуманитарную специальность, где пишут сочинение;
в) в негуманитарный вуз и писать сочинение;
г) в негуманитарный вуз и писать диктант;
д) мне важно школу закончить!

Срок отправки вступительной работы – до 1 июня 2007 года.

Вместе с работой пришлите, пожалуйста, стандартный конверт с маркой и заполненным вашим адресом (с индексом) для ответа Приемной комиссии.

Группам «Коллективный ученик» предлагаются курсы по русскому языку и литературе.

Отделение экономики

Экономическое отделение основано в 1993 году. Обучение проводится по двум основным программам: «Прикладная экономика» и «Экономика и география». Программа «Прикладная экономика» включает изучение основ экономической теории, а также знакомство с практикой бизнеса в деловой игре по переписке. Учащиеся программы «Экономика и география», помимо изучения основ экономической теории, знакомятся с физической и экономической географией, участвуют заочно в увлекательных путешествиях по странам мира.

Окончившим одну из основных программ предлагается специализация по выбору: «Основы предпринимательства и менеджмента», «Бухгалтерский учет и финансовый анализ», «Мировая экономика», «Экономика России: прошлое, настоящее и будущее».

На отделение принимаются все желающие с образованием не ниже 7 классов средней школы. Обучение проводится либо индивидуально, либо в небольших группах (2–4 человека). Формы обучения «Коллективный ученик» на экономическом отделении нет.

Учащимся 10–11 классов, желающим подготовиться одновременно к вступительным экзаменам на экономический факультет МГУ и в другие экономические вузы, предлагается специальная программа «Экономика ПЛЮС», включающая, наряду с экономическими дисциплинами, углубленное изучение нескольких дополнительных предметов: математики, обществознания, русского языка и литературы. Для школьников, интересующихся географической наукой и собирающихся поступать на географический факультет МГУ или другого вуза, существует программа «География ПЛЮС», созданная преподавателями ОЛ ВЗМШ и географического факультета МГУ на основе опыта подготовительных курсов по географии Московского университета.

Вступительная работа для учащихся дается в форме теста. Решения присылайте *только* на открытках с указанием полного почтового адреса и индекса, фамилии, имени и отчества (все – *печатными буквами*); обязательно укажите источник информации об ОЛ ВЗМШ и напишите «Экономика, вступительный тест-2007». На открытке достаточно записать в строчку номера вопросов и под каждым написать букву, соответствующую ответу, который вы считаете правильным.

В 2007 году исполняется 150 лет учреждению звания «Поставщик Двора Его Императорского Величества» – самой заветной награды для всех «производящих и торгующих» в Российской империи. Этот юбилей и является стержневым в нашем тесте. Правильно ответившие на все вопросы получат из букв своих ответов слово, выражающее то, о чем следует в первую очередь думать каждому жителю своей страны.

Срок отправки вступительной работы – до 15 мая 2007 года.

Тест

1. Без участия в международной торговле Россия оказалась бы практически полностью лишена:

О) красного дерева и натурального каучука;
Н) сахара и листового чая;
Р) конопляного и подсолнечного масла;
З) золота и ювелирных алмазов;
Л) бокситов и железной руды.

2. Какая из современных российских компаний была основана и получила широкую известность (под другим названием) еще в дореволюционный период (до 1917 г.):

Т) «Красный октябрь» (г. Москва);
И) «Волжский автозавод» («ВАЗ») (г. Тольятти);
Е) «Норильский никель» (г. Норильск);
А) «Красноярский алюминиевый завод» (г. Красноярск);
О) «Вымпелком» (г. Москва)?

3. Представители какого философского течения считали, что Россия есть третий серединный материк, особый исторический и этнографический мир; культурное и политическое лидерство этого мира призвано прийти на смену лидерству Запада:

Е) евразийство;
Р) народничество;
З) славянофильство;
С) анархизм;
Д) марксизм?

4. Выберите вариант, в котором значение первого экономического показателя всегда больше значения второго:

А) полезность товара, стоимость товара;
Е) доходы семейного бюджета, расходы семейного бюджета;
Ч) выручка фирмы, прибыль фирмы;
У) темп роста заработной платы в стране, темп роста цен в стране;
М) экспорт государства, импорт государства.

5. Тверской купец, совершивший в XV веке «хождение за три моря» и первый из русских побывавший в Индии, – это:

Р) Семен Дежнев;
Л) Иван Колесников;
Е) Афанасий Никитин;
Л) Василий Поярков;
Б) Фаддей Беллинсгаузен.

6. Герой русской литературы, получивший образование в Геттингенском университете в Германии, поклонник Канта и поэт – это:

Р) Павел Чичиков (поэма «Мертвые души» Н.В. Гоголя);
Ь) Александр Чацкий (поэма «Горе от ума» А.С. Грибоедова);
Е) Илья Обломов (роман «Обломов» А.И. Гончарова);
О) Андрей Болконский (роман «Война и мир» Л.Н. Толстого);
С) Владимир Ленский (поэма «Евгений Онегин» А.С. Пушкина).

7. Регион России, крупный поставщик на мировой рынок энергоресурсов, в котором производство продукции в расчете на душу населения максимально, – это:

Ц) республика Коми;
Н) Ненецкий автономный округ;
И) Сахалинская область;
Е) республика Татарстан;
Т) Ханты-Мансийский автономный округ.

8. За вторую половину XX века вследствие научно-технического прогресса цены на компьютеры снизились в 52 раза. Это означает, что стоимость компьютеров за этот период сократилась на (укажите наиболее точный ответ):

И) 5200%;
В) 5100%;
О) 2%;
А) 48%;
З) 98%.

9. Страна закупает газ у двух иностранных поставщиков. Первый поставляет газ по цене 65 долларов за одну тысячу кубометров, а второй – по цене 230 долларов за тот же объем. Какая часть от общего объема поставок приходится на второго поставщика, если покупка одной тысячи кубометров газа обходится стране в среднем в 95 долларов:

Т) примерно 18%;
Я) примерно 38%;
Е) примерно 54%;
К) примерно 62%;
О) примерно 82%?

Отделение «Нравственность, право, закон» (право и граждановедение)

Это – одиннадцатый набор на отделение.

Школьникам 8 – 11 классов и группам «Коллективный ученик» предлагаются два курса.

1) Годовой курс «Беседы о правах человека, нравственности, праве, законе и государстве». В курсе даются современные представления об основных понятиях, связанных с правом, законом и государством, рассказывается об основах российского законодательства, о правах человека. Разбираются примеры судебных процессов, приводятся общекультурные примеры, связанные с направленностью курса.

2) Полуторагодовой курс «Беседы об основах демократии».

Мы предлагаем проходить курсы именно в таком порядке. И только старшеклассники, если они не успевают пройти два курса подряд, но хотят освоить именно второй курс, могут начинать прямо с него.

Желающие поступить должны сообщить свой полный почтовый адрес (и адрес электронной почты, если есть), фамилию, имя и отчество, сколько классов закончено. При оценке вступительной работы мы учитываем возраст (базовое образование) поступающего. В письмо обязательно *вложите обычный конверт с маркой и вашим адресом* (чтобы мы могли вам ответить) и ответы на приведенные ниже вопросы теста.

Срок отправки вступительной работы – до 1 июня 2007 года.

Тест

1. Кто, по вашему мнению, лишний в этой «компании»:
а) Спасович В.Д.;
б) Корнилов Л.Г.;
в) Кони А.Ф.;
г) Плевако Ф.Н.?

2. Если вы не знаете ответа на какой-то вопрос, как вы поступите:
а) спросите у кого-то (у кого?);
б) пойдете в библиотеку;
в) поищете ответ в Интернете;
г) еще что-то – что?

3. Перед вами три слова (три понятия): демократия, государство, общество. Попробуйте выделить первичное, основное, понятие, поставьте его первым и соедините все три понятия стрелками, указывающими, что на что влияет.

4. Как вы можете объяснить поговорку: «Дуракам закон не писан»?

Отделение истории

Отделение истории открылось в 1998 году. Обучение на историческом отделении позволит всем, в том числе жителям самых отдаленных городов и деревень, расширить свой кругозор и подготовиться к поступлению в вуз. Успешно прошедшие годовой курс обучения получают диплом Открытого лицея ВЗМШ при МГУ.

А зачем нужно изучать историю? Во-первых, это просто интересно. Любопытно знать, как жили когда-то люди, во что одевались, чем питались, что читали, как женились и выходили замуж, за что боролись и на что «напарывались». Во-вторых, это полезно. Только зная прошлое, можно понять настоящее и прогнозировать будущее. Мы поможем вам в этом разобраться.

Специально для вас опытные преподаватели пишут книжки. Последние новости из мира истории вы узнаете первыми! Мы будем поддерживать с вами постоянную связь. По нашим книжкам вы будете выполнять особые задания и сообщать нам, что вы раскопали. Ведь, в сущности, труд историка и состоит из этих раскопок: историк-археолог, копая землю и песок, отыскивает крупицы ушедших времен; историк-архивариус копается в груде бумаг и достает из архивов и даже из частной переписки все, что может позволить ему понять образ времени; историк-теоретик как увлекательный роман читает археологические таблицы, сухие сводки, статистику и восстанавливает по ним живую ткань ушедшей жизни. У историка особая профессия: он в одном лице следователь, прокурор и адвокат времени.

Вступительное задание на отделение выполняется на двойном листе бумаги.

Срок отправки вступительной работы – до 15 мая 2007 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы, только по заявлению руководителя.

Задание

1. Отгадайте, кто это:

• С легкой руки Фридриха II его прозвали «русский Гамлет».

• Его отец – внук Петра I по материнской линии и внучатый племянник Карла XII по отцовской.

• Его мать, немецкая принцесса, приехала в Россию в 15 лет; пришла к власти в 33 года; правила 34 года, не имея на трон законных прав.

• Придя к власти в 42 года, он отменил указ Петра I о престолонаследии, которым чуть не воспользовалась его мать, желавшая передать власть внуку, минуя сына.

• Православный царь, глава католического Мальтийского ордена.

• Главная черта его правления – мелочный деспотизм.

• Во время военных смотров мог отправить в Сибирь прямо с плаца за нечеткий шаг, оторвавшуюся пуговицу или плохо напудренные букли.

• Проверял преданность придворных внезапной ночной тревогой, требуя явиться ко двору без всякого промедления, хоть бы и в ночной рубахе.

• При нем за ношение одежды на французский манер и использование одновременно трех цветов – красного, синего и белого – подвергали аресту.

• Чтобы ослабить Англию, отправил 22 тысячи казаков завоевывать Индию, и только его смерть вернула воинов с дороги.

• Боясь заговора, этот император построил себе замок и в нем был убит.

• Его старший сын мечтал о конституции для России, а дал ее Польше.

2. Нарисуйте, не более чем в 7 предложениях, портрет русского правителя, образ которого воплощен в трагедии А.С.Пушкина, заканчивающейся строкой «...народ безмолвствует».

Отделение информатики

Отделение информатики открылось в 2006 году. Прием ведется на курс «Программирование для начинающих».

На отделение принимаются все желающие с образованием не ниже 7 классов средней школы. Для успешного выполнения практических заданий должна быть возможность работы на компьютере. За год обучения учащиеся освоят основные конструкции языка Паскаль, изучат простейшие алгоритмы и в качестве итоговой работы напишут игровую программу.

Для зачисления необходимо прислать анкету с ответами на приведенные ниже вопросы.

Внимание! Ответы на вопросы анкеты присылайте на двойном тетрадном листе, указав на первой странице важные для нас данные: Ф.И.О., класс, который вы заканчиваете, полный (с индексом!) почтовый адрес, адрес электронной почты (если есть). Пишите развернутые ответы на вопросы.

Срок отправки анкеты – до 15 мая 2007 года.

Вопросы

1. Изучаете ли вы в школе информатику? Какие темы вы изучили?

2. Что такое информатика? Что изучается в разделе «Программирование»?

3. Изучали ли вы какие-нибудь языки программирования? Какие?

4. Какие операционные системы вы знаете?

5. Какие программы установлены на компьютере, за которым вы работаете?

6. Есть ли у вас возможность выхода в Интернет?

7. Знаете ли вы, что такое: а) циклы; б) массивы; в) функции; г) условия?

8. Что такое рекурсия, индукция? В чем различия между ними?

9. По кругу выложены 15 камешков в порядке увеличения веса. Внешне все камешки отличаются друг от друга: состоят из разных пород, имеют различную окраску, форму, вес, объем и т.д. Как при помощи чашечных весов без стрелок и гирек найти самый тяжелый камень, сделав при этом как можно меньше взвешиваний?

Федеральная заочная физико-техническая школа при МФТИ

Федеральная заочная физико-техническая школа (ФЗФТШ) при Московском физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий и т. п.), расположенных на территории Российской Федерации, на 2007/08 учебный год.

ФЗФТШ при МФТИ как государственное учреждение профильного дополнительного образования детей работает с 1966 года. За прошедшие годы школу окончили более 76 тысяч учащихся; практически все ее выпускники поступают в ведущие вузы страны, а каждый второй студент МФТИ – ее выпускник. Финансирует школу Федеральное агентство по образованию. Обучение для учащихся, проживающих в Российской Федерации, в рамках утвержденного плана приема – бесплатное.

Научно-методическое руководство школой осуществляет Московский физико-технический институт (государственный университет), который готовит высококвалифицированных специалистов по современным направлениям науки и техники. В их подготовке принимают участие ведущие отраслевые и академические научно-исследовательские институты и научно-производственные объединения страны (базовые организации МФТИ). Преподавание в МФТИ ведут известные педагоги и ученые, среди которых около 100 членов Российской академии наук. Физтеховское образование позволяет не только успешно работать в науке, но и хорошо ориентироваться в жизни.

Цель нашей школы – помочь учащимся, интересующимся физикой и математикой, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам, а также способствовать профессиональному самоопределению учащихся.

Набор в 8, 9, 10 и 11 классы на 2007/08 учебный год проводится на заочное, очно-заочное и очное отделения.

Заочное отделение *(индивидуальное обучение)*
Тел./факс: (495) 408-51-45

Прием на заочное отделение осуществляется на конкурсной основе по результатам выполнения вступительного задания по физике и математике, приведенного ниже. Полная программа обучения рассчитана на 4 года, т.е. на 8–11 классы, но поступать можно в любой из этих классов.

В течение учебного года, в соответствии с программой ФЗФТШ, ученик будет получать по каждой теме задания по физике и математике (4 задания по каждому предмету для 8 класса, 6–7 заданий по каждому предмету для 9, 10 и 11 классов), а затем – рекомендуемые авторские решения этих заданий вместе с проверенной работой. Задания содержат теоретический материал, разбор характерных примеров и задач по соответствующей теме и 8–12 контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Задания составляют опытные преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ. Работы учащихся-заочников проверяют студенты, аспиранты и выпускники МФТИ (из них 80% – бывшие ученики нашей школы).

Вне конкурса в ФЗФТШ принимаются *победители областных, краевых, республиканских, окружных и всероссийских олимпиад по физике и математике 2006/07 учебного года.* Им необходимо до 15 мая 2007 года выслать в ФЗФТШ выполненную вступительную работу по физике и математике вместе с копиями дипломов, подтверждающих участие в вышеперечисленных олимпиадах.

Срок отправления решения вступительного задания – *не позднее 1 марта 2007 года.* Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 2007 года.

Тетрадь с выполненными заданиями (по физике и математике) высылайте по адресу:

141700 г. Долгопрудный Московской области, Институтский пер., 9, ФЗФТШ при МФТИ.

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно в одной школьной тетради на русском языке, сохраняя тот же порядок задач, что и в задании. Тетрадь нужно выслать в конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку).

На *внутреннюю* сторону обложки тетради наклейте справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса.

На *лицевую* сторону обложки наклейте лист бумаги, четко заполненный по следующему образцу:

1. Область	*Ставропольский край*
2. Фамилия, имя, отчество	*Александрова Ксения Владимировна*
3. Класс, в котором учитесь	*восьмой*
4. Номер школы	*7*
5. Вид школы (обычная, лицей, гимназия, с углубленным изучением предмета)	*обычная*
6. Подробный домашний адрес (с указанием индекса), телефон, e-mail	*357100 г. Невинномысск, ул. Садовая, д.38, кв. 6, samgvis@yandex.ru*
7. Место работы и должность родителей:	
отец	*инженер-программист*
мать	*экономист*
8. Адрес школы, телефон, факс, e-mail	*357100 г. Невинномысск, ул. Гагарина, д.53б, school7@nev.ru*

Поздравляем с 40-летием ФЗФТШ всех учащихся и преподавателей Заочной физико-математической школы при МФТИ!

9. Фамилия, имя, отчество преподавателей:
   по физике — *Власова Елена Петровна*
   по математике — *Селиванова Ирина Кирилловна*

10. Каким образом к вам попало это объявление?

На конкурс ежегодно приходит более 4 тысяч вступительных работ. Пожалуйста, обратите внимание на правильность заполнения анкеты! Пишите аккуратно, лучше печатными буквами.

Для получения ответа на вступительное задание и для отправки вам первых заданий *обязательно* вложите в тетрадь *два одинаковых* бандерольных конверта размером 160×230 мм. На конвертах четко напишите свой домашний адрес.

Очно-заочное отделение *(обучение в факультативных группах)*

Тел./факс: (495) 409-93-51

Факультативные группы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении *двумя преподавателями* – физики и математики, в отдельных случаях разрешается обучение по одному предмету. Руководители факультатива принимают в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ФЗФТШ.

Группа (не менее 8 человек) принимается в школу, если директор общеобразовательного учреждения сообщит в ФЗФТШ фамилии, имена, отчества ее руководителей и поименный алфавитный список обучающихся (Ф.И.О. полностью, с указанием класса *текущего учебного года и итоговых оценок* за вступительное задание по физике и математике, домашний адрес учащихся, с указанием индекса, телефон и e-mail), телефон, факс и e-mail общеобразовательного учреждения. Все эти материалы и конверт для ответа о приеме в ФЗФТШ с обратным адресом одного из руководителей следует выслать *до 25 июня 2007 года* по адресу: 141700 г. Долгопрудный Московской области, Институтский пер., 9, ФЗФТШ при МФТИ (с пометкой «Факультатив»). *Тетради с работами учащихся не высылаются.*

Работа руководителей факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением как руководство профильными факультативными занятиями по предоставлении ФЗФТШ при МФТИ соответствующих сведений.

Руководители, работающие с учащимися, будут получать в течение учебного года учебно-методические материалы (программы по физике и математике, задания по темам программ, решения заданий с краткими рекомендациями по оценке работ учащихся), приглашаться на курсы повышения квалификации учителей физики и математики, проводимые на базе МФТИ. Работы учащихся проверяют и оценивают руководители факультативных групп, а в ФЗФТШ ими *высылаются ведомости с итоговыми оценками по каждому заданию и итоговая ведомость за год.*

Очное отделение (*обучение в вечерних консультационных пунктах)*

Тел.: (495) 409-95-83

Для учащихся Москвы и Московской области по программе ФЗФТШ работают вечерние консультационные пункты, набор в них проводится по результатам вступительных экзаменов по физике и математике и собеседования, которое проходит во второй половине сентября.

Программы ФЗФТШ при МФТИ являются профильными дополнительными образовательными программами и едины для всех отделений. Кроме занятий по этим программам, ученикам всех отделений будет предложено участвовать в физико-математической олимпиаде «ФИЗТЕХ-2007», которая будет проводиться на базе МФТИ и в ряде городов России в конце марта и в середине мая, в других очных и заочных олимпиадах МФТИ и его факультетов, а также в конкурсах, турнирах и конференциях. Для учащихся 9 – 11 классов на базе МФТИ работает субботний лекторий по физике и математике по программе ФЗФТШ. Лекции читают преподаватели института, как правило, авторы заданий. Подробнее об этих мероприятиях можно прочитать на сайте:

http://www.school.mipt.ru

По окончании учебного года учащиеся, успешно выполнившие программу ФЗФТШ, переводятся в следующий класс, а выпускники (одиннадцатиклассники) получают свидетельство об окончании школы с итоговыми оценками по физике и математике, которое учитывается на собеседовании при поступлении в МФТИ.

Ученикам, зачисленным в ФЗФТШ в рамках утвержденного плана приема, будет предложено оплатить безвозмездный целевой взнос для обеспечения учебного процесса в соответствии с уставными целями школы. Сумма взноса будет составлять ориентировочно для учащихся заочного отделения 500–900 руб. в год, очного 650–1300 руб., очно-заочного 900–1620 руб. (с каждой факультативной группы за год).

Для учащихся Украины работает Киевский филиал ФЗФТШ при МФТИ (обучение платное). Желающим в него поступить следует высылать вступительные работы по адресу: 03680, Украина, г. Киев, б-р. Вернадского, д. 36, ГСП, Киевский филиал ФЗФТШ при МФТИ. Телефон в Киеве: 424-30-25.

Для учащихся из зарубежных стран возможно только платное обучение на заочном и очно-заочном отделениях ФЗФТШ. Условия обучения для прошедших конкурсный отбор будут сообщены дополнительно.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике. Номера задач, обязательных для выполнения (заочное и очно-заочное отделения), указаны в таблице (номера классов соответствуют текущему 2006/07 учебному году):

	7 класс	8 класс	9 класс	10 класс
Физика	1 – 2, 4 – 6	3, 6 – 10	7, 9 – 14	11 – 17
Математика	1 – 6	4 – 9	7 – 13	10 – 16

Вступительное задание по физике

1 (экспериментальная задача). Сырое куриное яйцо тонет в пресной воде. Экспериментально определите минимальное значение плотности соленой воды, при которой в ней не тонет куриное яйцо. Опишите метод измерения и приведите полученный результат.

2. Турист первую половину расстояния между пунктами A и $Б$ проехал на велосипеде со скоростью 25 км/ч, а вторую половину прошел со скоростью 5 км/ч. Сколько времени он шел, если весь путь занял 3 часа?

3. Колонна грузовиков, растянувшаяся по шоссе на $L = 600$ м, движется со скоростью $v_1 = 60$ км/ч. В начале длинного подъема грузовики быстро снижают скорость до некоторой величины v_2 и двигаются с такой скоростью вдоль подъема. В момент, когда первая машина начинает подъем, из хвоста колонны по направлению к головной машине выезжает мотоциклист. Двигаясь с постоянной скоростью, он оказывается у головной машины через $t_0 = 1,5$ мин. Определите длину колонны на подъеме и скорость мотоциклиста, если известно, что его скорость на 50% больше скорости грузовика на подъеме.

4. Из тонкой алюминиевой фольги в один слой склеен полый куб с площадью поверхности $120\ \text{см}^2$. Масса потребовавшейся для этого фольги равна 1,3 г. Определите толщину фольги.

5. Имеется U-образная вертикально расположенная трубка (рис.1). Ее левое колено имеет постоянную площадь поперечного сечения S по всей высоте, а правое колено от основания до высоты H = 30 см имеет такую же площадь поперечного сечения, а выше его площадь равна $2S$. Трубка заполнена водой до высоты $0{,}8H$. В левое колено трубки наливают слой масла высотой $h = H$. На сколько поднимется уровень воды в правом колене? Плотность воды $\rho_в = 1\ \text{г/см}^3$, плотность масла $\rho_м = 0{,}8\ \text{г/см}^3$.

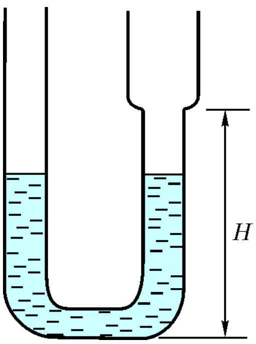


Рис. 1

6. К динамометру на легкой нити подвешен сплошной металлический шар. Шар полностью погружают в масло, находящееся в сосуде с вертикальными стенками. При этом показание динамометра равно $P_1 = 0{,}37$ Н. В сосуд долили объем воды, равный объему масла. При этом жидкости расслоились, и показание динамометра оказалось равным $P_2 = 0{,}33$ Н. Определите плотность материала шара и его объем.

7. Тело кубической формы находится под водой в открытом водоеме так, что верхняя грань куба параллельна поверхности воды и находится на глубине $h_1 = 2$ м. Сила F_2, действующая на нижнюю грань куба со стороны воды, в 1,1 раза больше силы F_1, действующей на верхнюю грань. Найдите длину ребра куба, а также силы, F_1 и F_2. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

8. Энергия солнечного излучения, падающего в секунду на один квадратный метр земной поверхности, составляет примерно 1000 Дж. На сколько уменьшится толщина льдины на поверхности замерзшего водоема за один световой день? Считать, что лед поглощает 10 % падающего излучения. Температуру льда принять равной 0 °С, а продолжительность светового дня – 6 часов.

9. Смешивают $m_1 = 300$ г воды при температуре $t_1 = 10$ °С и $m_2 = 400$ г льда при температуре $t_2 = -20$ °С. Определите установившуюся температуру смеси. Удельная теплоемкость воды $c_в = 4200\ \text{Дж/(кг} \cdot \text{К)}$, льда $c_л = 2100\ \text{Дж/(кг} \cdot \text{К)}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 330 \cdot 10^3$ Дж/кг. Потерями тепла пренебречь.

10. Для нормальной работы некоторого электрического прибора требуется, чтобы подаваемое на него напряжение было не менее $U_{\min} = 200$ В. В этом случае потребляемая прибором мощность равна N = 1 кВт. В силу большой удаленности прибора от розетки, его приходится включать в сеть через удлинитель. Напряжение в розетке составляет U = 220 В. На каком максимальном удалении l от розетки может работать прибор, если провода удлинителя изготовлены из меди и имеют диаметр 1 мм?

11. Расстояние s = 18 км между двумя станциями поезд проходит со средней скоростью $v_{ср} = 54$ км/ч, причем на разгон тратит $t_1 = 2$ мин, затем идет с постоянной скоростью и на замедление до полной остановки тратит $t_2 = 1$ мин. Определите наибольшую скорость поезда. Разгон и торможение происходят равноускоренно.

12. Расстояние между двумя свободно падающими каплями через время $t_1 = 2$ с после начала падения второй капли было L = 25 м. На сколько позднее начала падать вторая капля? Сопротивление воздуха не учитывать. Капли падают из одной точки.

13. Небольшой груз массой m лежит на длинной доске массой M (рис.2). Коэффициент трения между доской и грузом μ_1, а между доской и столом μ_2. По доске наносят удар, и она начинает двигаться поступательно с начальной скоростью v_0 по поверхности стола. Определите время, через которое прекратится скольжение груза по доске.

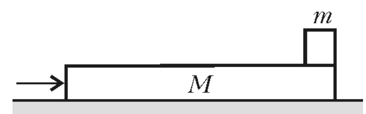


Рис. 2

14. Мяч массой $m = 0{,}5$ кг бросают со скоростью $v_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Затем мяч сталкивается с вертикальной стенкой и после упругого удара возвращается в точку броска. Найдите среднюю силу, действующую на мяч со стороны стенки, если длительность удара составляет $\tau = 0{,}01$ с. Сопротивление воздуха не учитывать.

15. Один моль гелия нагревался при постоянном объеме V_0 = 400 л так, что относительное увеличение его давления составило $\Delta p/p_0 = 0{,}004$ (здесь p_0 – начальное давление гелия). На сколько градусов увеличилась температура газа, если его начальная температура была $T_0 = 500$ К ?

16. В цилиндре под поршнем площадью $S = 100\ \text{см}^2$ находится азот (N_2) массой $m_а = 560$ г. В цилиндр вводится водород (H_2) массой $m_в = 1$ г, и поршень поднимается. Чтобы вернуть объем смеси газов под поршнем к прежнему значению, на поршень кладут груз некоторой массой m. Определите m, если известно, что масса поршня M = 100 кг, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Температура в цилиндре поддерживается постоянной.

17. Три одинаковых заряженных шарика связаны легкими непроводящими нитями одинаковой длиной l и находятся в покое на гладкой горизонтальной поверхности (рис.3). Массы шариков одинаковы и равны m. Заряды шариков одинаковы и равны q. Две нити одновременно пережигают. Найдите модули ускорений всех шариков сразу после пережигания нитей.

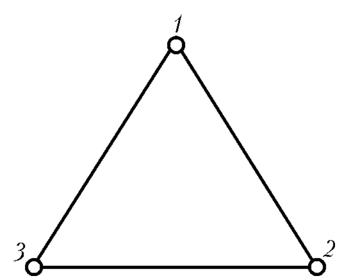


Рис. 3

Вступительное задание по математике

(после порядкового номера задачи в скобках указано количество очков за задачу)

1(4). Студент купил принтер, клавиатуру и мышку, потратив 5970 рублей 75 копеек. Известно, что стоимость мышки составляет 1/3 стоимости клавиатуры, а стоимость клавиатуры и мышки, вместе взятых, составляет 4/21 стоимости принтера. Сколько стоит каждый предмет в отдельности?

2(5). Свежий виноград имеет влажность 99%. Через месяц после сбора ягод влажность составляла уже 98%. Определите, на сколько процентов изменилась масса винограда.

3(6). а) На сколько градусов поворачивается за минуту минутная стрелка? А часовая стрелка?

б) В полдень минутная и часовая стрелки совпали. Когда они совпадут в следующий раз?

в) Какой угол образуют минутная и часовая стрелки в 3 часа 5 минут?

4(5). – Спускаясь вниз по эскалатору, я насчитал 50 ступенек, – сказал волк.

– А я насчитал 75, – возразил заяц, – но я спускался в три раза быстрее.

Если бы эскалатор остановился, то сколько ступенек можно было бы насчитать на его видимой части? Предполагается, что волк и заяц двигались равномерно и скорость эскалатора постоянна.

5(6). Угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC равен 108°. Перпендикуляр к биссектрисе AD этого треугольника, проходящий через точку D, пересекает сторону AC в точке E. Найдите DE, если $DB = 6$.

6(5). Найдите число, при делении на которое три числа 480608, 508811 и 723217 давали бы один и тот же остаток.

7(6). Решите уравнение

$$\frac{5}{x-1}+\frac{3}{x-2}+\frac{3}{x-3}+\frac{5}{x-4}=0 .$$

8(5). Решите неравенство

$$\frac{\left(x^2-5x-6\right)\left(5x^2+2x+2\right)}{x^{2006}\left(9x^2-6x+1\right)\left(x-3x^2+2\right)} \le 0 .$$

9(8). Окружность, построенная на большем основании трапеции как на диаметре, проходит через середины ее боковых сторон и касается меньшего основания. Найдите углы трапеции.

10(8). а) Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$\begin{cases} y \ge |x-2|, \\ y+2|x-5| \le 9. \end{cases}$$

б) Найдите площадь полученной фигуры.

11(7). На продолжениях сторон AB, BC, CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ за точки B, C, D и A соответственно отложены отрезки BB_1, CC_1, DD_1 и AA_1, равные этим сторонам (рис.4). Найдите площадь четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$, если площадь четырехугольника $ABCD$ равна S.

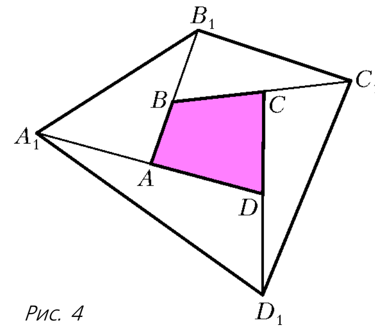


Рис. 4

12(6). В арифметической прогрессии с отличной от нуля разностью сумма членов с четными номерами, не превосходящими 29, равна 168. Найдите номер того члена прогрессии, который равен 12.

13(7). Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \le \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9} .$$

14(8). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(2a-1)x^2+ax+2a-3=0$$

имеет не более одного корня.

15(8). Решите уравнение

$$\sqrt{3+4\sqrt{6}-\left(16\sqrt{3}-8\sqrt{2}\right)\cos x} = 4\cos x-\sqrt{3} .$$

16(9). Окружность, вписанная в треугольник ABC, делит медиану BM на три равные части. Найдите BC и AB, если известно, что $CM = 5$.

Новый прием в школы-интернаты при университетах

Специализированный учебно-научный центр (СУНЦ) МГУ (школа имени академика А.Н. Колмогорова), а также СУНЦ НГУ, СУНЦ УрГУ и Академическая гимназия при СПбГУ объявляют набор учащихся в 10 классы (двухгодичное обучение) на физико-математическое и химико-биологическое отделения и в 11 классы (одногодичное обучение) на физико-математическое отделение. В рамках двухгодичного физико-математического отделения кроме основного профиля выделяется компьютерно-информационный класс (СУНЦ МГУ). Химико-биологическое отделение представлено специализациями по химии и биологии.

Зачисление в школу проводится на конкурсной основе. Первый тур экзаменов – заочный письменный экзамен по математике и физике или химии. Успешно выдержавшие заочный экзамен в апреле – мае приглашаются в областные центры Российской Федерации на устные экзамены. Однако *допускается участие в очном туре школьников, не участвовавших в заочном туре*.

Ниже приводятся условия задач *заочного* вступительного экзамена. Работа должна быть выполнена в обычной ученической тетради, на обложке которой указываются фамилия, имя, отчество (полностью), желаемый профиль обучения, подробный домашний адрес с индексом, электронный адрес (если имеется), адрес и номер школы, класс.

Работу нужно отправить простой бандеролью на имя Приемной комиссии по одному из следующих адресов (обязательно вложите конверт с маркой, заполненный на ваш домашний адрес с индексом):

121357 Москва, Кременчугская ул., 11, СУНЦ МГУ (внимание: жители Москвы принимаются в школу без предоставления общежития), телефон Приемной комиссии: (495)445-11-08, сайт: http://www.pms.ru, e-mail: priem@pms.ru;

199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/96, Академическая гимназия;

620137 Екатеринбург, ул. Голощекина, 30, СУНЦ УрГУ;

630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, СУНЦ НГУ (Олимпиадный комитет).

Срок отправки работ – *не позднее 1 марта 2007 года* (по почтовому штемпелю). Работы, высланные позже этого срока, рассматриваться не будут.

Вступительное задание заочного тура

Математика

Для поступающих в 10 класс

1. Турист отправляется в поход из A в B и обратно и проходит весь путь за 3 ч 41 мин. Дорога из A в B длиной 9 км идет сначала в гору, потом по ровному месту, потом под гору. На каком протяжении дорога проходит по ровному месту, если скорость туриста при подъеме в гору 4 км/ч, под гору 6 км/ч, по ровному месту 5 км/ч?

2. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если точка касания вписанной в него окружности с гипотенузой делит гипотенузу на отрезки a и b.

3. На доске записаны числа $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{12}$.

а) Можно ли между этими числами расставить знаки «+» или «–» так, чтобы полученная сумма оказалась равной 0?

б) Какое наименьшее количество чисел нужно вычеркнуть так, чтобы после некоторой расстановки знаков «+» и «−» между оставшимися числами получить сумму, равную нулю?

4. Решите систему уравнений

$$x\left(1+\sqrt{y}\right)=y\left(1+\sqrt{z}\right)=z\left(1+\sqrt{x}\right)=2 .$$

5. Пять отрезков таковы, что любые три из них являются сторонами некоторого треугольника. Могут ли все такие треугольники быть тупоугольными?

Для поступающих в 11 класс

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=x+y-2z, \\ z^2+x^2=z+2x-y, \\ y^2+z^2=2y+z-x. \end{cases}$$

2. Школьник начал писать олимпиадную работу между 10 и 11 часами и закончил между 14 и 15 часами в тот момент, когда часовая и минутная стрелки часов поменялись местами. Сколько времени он писал свою работу?

3. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты, соответственно, точки M и N. Найдите $BN:NC$ и $AM:MC$, если известно, что три из четырех частей, на которые разбивают треугольник ABC отрезки AN и BM, имеют одинаковые площади.

4. Пусть a, b, c – длины сторон треугольника, m_a, m_b, m_c – длины его медиан. Существует ли треугольник со сторонами $a+m_a$, $b+m_b$, $c+m_c$?

5. Существует ли арифметическая прогрессия, состоящая из: а) трех; б) четырех; в) n чисел, каждое из которых является целой степенью, большей 1, натурального числа?

Физика

(физико-математическое отделение)

Для поступающих в 10 класс

1. В бассейне по трем дорожкам плывут пловцы: первый и второй в одну сторону, третий – в противоположную. Скорость второго пловца v_2, третьего v_3. Найдите скорость первого пловца, если пловцы находятся относительно друг друга на одной прямой.

2. Частица начинает двигаться по прямой линии из состояния покоя с постоянным ускорением. В момент времени $t_1=3$ с скорость частицы в точке A равна $v_1=6$ м/с. Найдите расстояние s между частицей и точкой A за секунду до пересечения частицей этой точки.

3. На гладкой тонкой оси висит (перекинут) однородный канат длиной l и массой m. Найдите величину силы давления N на ось при соскальзывании каната, когда расстояние между его концами равно s.

4. Относительное удлинение шнура, прикрепленного к висящему каскадеру, равно $\varepsilon_1=0,04$. Один конец шнура закрепляется на высоте $H=50$ м. Каскадер падает от точки закрепления шнура. Длина и жесткость шнура подобраны так, что скорость каскадера у поверхности земли равна нулю. а) Найдите длину шнура l_0 в ненапряженном состоянии. б) Найдите величину ускорения каскадера в нижней точке траектории. в) Найдите максимальную скорость каскадера.

5. В трех одинаковых сообщающихся сосудах находится ртуть. В первый сосуд наливают слой воды высотой h_1, в третий – слой воды высотой h_3. Найдите величину приращения уровня ртути h_2 во втором сосуде.

Для поступающих в 11 класс

1. Льдину в форме диска сечением $S=1$ м^2 и высотой $h=1$ м погружают в воду. а) Льдина подвешена на тросах. В начальном положении нижняя плоскость льдины касается поверхности воды, в конечном состоянии льдина плавает. Определите работу A_1, совершаемую внешней силой. б) Определите работу A_2, которую необходимо совершить для полного погружения льдины.

2. Температура воды в сосуде $t_1=20$ °С. Стакан нагрели до температуры $t_2=100$ °С и приложили открытым торцом к поверхности воды. Высота стакана $L=10$ см, площадь поперечного сечения $S=40$ см^2. Найдите массу воды m, втянутой в стакан, после установления теплового равновесия при температуре t_1.

3. На рисунке 1 изображена $p-V$-диаграмма цикла a-b-c-a, проведенного с ν молями газа. Температуры в состояниях a, b, c таковы: $T_a=T_b$ и T_c. КПД цикла равен η. Найдите работу A'_{ab}, совершенную газом в процессе a-b. Обход цикла – по часовой стрелке.

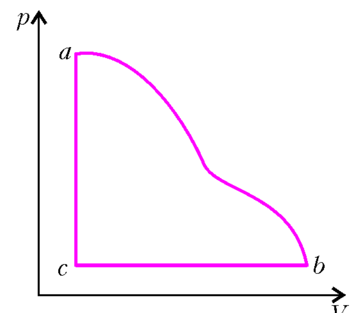


Рис. 1

4. Частица находится на прямой, проходящей через центр тонкого кольца перпендикулярно плоскости кольца. Заряд и масса частицы равны $q_1=-Q$ и m. По кольцу массой m равномерно распределен заряд $q_2=Q$. В начальном положении частица находилась на оси кольца на расстоянии $s=\sqrt{3}R$, где R – радиус кольца, от его центра. Найдите величину относительной скорости v_0 в момент прохождения частицей центра кольца.

5. Мощность, потребляемая схемой, приведенной на рисунке 2, равна U^2/R, где U – разность потенциалов точек a и b, R – сопротивление резистора R_3. Сопротивления двух других резисторов одинаковы. Найдите мощность P_3, потребляемую резистором R_3.

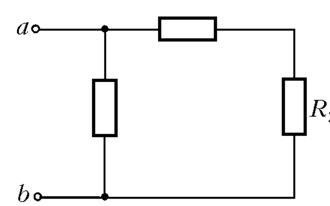


Рис. 2

Химия

(химико-биологическое отделение)

В лабораторный калориметр налили 100 г раствора пероксида водорода и добавили катализатор (MnO_2). В результате полного разложения пероксида водорода температура калориметра повысилась на 12 °С. В другом эксперименте тоже взяли 100 г раствора пероксида водорода в том же калориметре и поместили в него электронагреватель сопротивлением 36 Ом. Нагреватель подключили к источнику электропитания напряжением 24 В, и через 10 мин калориметр нагрелся на те же 12 °С. Теплоемкостью выделяющегося кислорода и электронагревателя можно пренебречь. Разложение пероксида водорода протекает по реакции

$$2H_2O_2 = 2H_2O + O_2 + 198 \text{ кДж} .$$

1. Определите примерную массовую долю пероксида водорода в исходном растворе.

2. Определите объем кислорода (н.у.), который выделился при разложении пероксида водорода в первом эксперименте.

3. Сколько граммов перманганата калия потребуется, чтобы при его термическом разложении получить то же количество кислорода?

КМШ

Задачи

(см. «Квант» №5)

1. Не может.
Предположим противное: пусть для некоторых натуральных чисел x, y выполняется равенство

$$(x-1)x(x+1)=(2y-2)2y(2y+2).$$

Возможны три случая.
Если $x = 2y$, то равенство преобразуется к неверному тождеству $4y^2-1=4y^2-4$.
Если $x < 2y$, то $x-1 \le 2y-2$, $x+1 < 2y+2$, и выражение в правой части равенства больше выражения в левой части.
Если $x > 2y$, то $x-1 > 2y-2$, $x+1 \ge 2y+2$, и выражение в левой части равенства больше выражения в правой части.
Итак, во всех трех случаях приходим к противоречию.

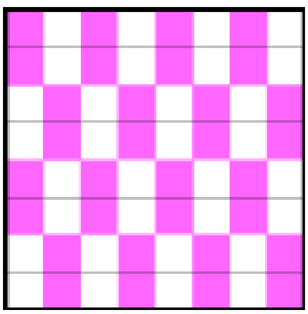


Рис. 1

2. 32 клетки (как это сделать, показано на рисунке 1.
Для доказательства того, что больше 32 клеток отметить невозможно, разделим доску на 16 квадратов размером 2×2. Если на доске отмечено больше 32 клеток, то найдется квадрат, в котором отмечено не меньше трех клеток. Но тогда, очевидно, одна из этих клеток будет иметь общую сторону с двумя другими, что недопустимо.

3. Докажем, что произведение двух красных чисел является красным числом. Предположим противное: пусть произведение некоторых красных чисел κ_1 и κ_2 – синее число: $\kappa_1\kappa_2=c$. Из условия задачи следует, что κ_2+c – синее число. Рассмотрим произведение $\kappa_1(\kappa_2+c)$. С одной стороны, это красное число – как произведение разноцветных чисел. С другой стороны, $\kappa_1(\kappa_2+c)=\kappa_1\kappa_2+\kappa_1c$ это синее число – как сумма двух разноцветных чисел (число $\kappa_1\kappa_2$ по предположению синее, а число κ_1c по условию красное). Противоречие.

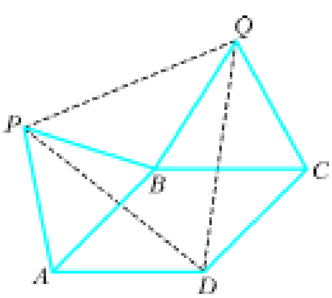


Рис. 2

4. Сначала докажем, что треугольники DPA, PQB, QDC равны (рис.2). Учитывая, что треугольник APB правильный, а стороны AB и CD являются противоположными сторонами параллелограмма, получаем $AP = PB = AB = CD$. Аналогично, $AD = BC = QB = QC$. Обозначим $\angle BAD=\angle BCD=\alpha$. Тогда

$$\angle DAP=\alpha+60^\circ,\quad \angle QCD=\alpha+60^\circ,$$

$$\angle PBQ=360^\circ-(\angle PBA+\angle QBC+\angle ABC)=$$
$$=360^\circ-(120^\circ+180^\circ-\alpha)=\alpha+60^\circ.$$

Итак, $\Delta DPA=\Delta PQB=\Delta QDC$ по двум сторонам и углу между ними. Тогда $PQ = QD = DP$, т.е. треугольник PQD равносторонний.

5. Несложно проверить, что каждое из трех миллионзначных чисел 1…11, 1…12, 1…13, в которых многоточием обозначены единицы, является кошачьим. Убедимся в том, что большее количество кошачьих чисел не может стоять подряд в натуральном ряду.
Вначале заметим, что среди цифр любого кошачьего числа отсутствуют нули, поэтому подряд стоящих кошачьих чисел может быть не больше девяти, причем у всех этих чисел цифры старших разрядов, начиная с разряда десятков, совпадают. Рассмотрим эти числа и обозначим через P произведение цифр в их старших разрядах. По условию, каждое из рассматриваемых кошачьих чисел делится на P. Поскольку каждые два рядом стоящие числа натурального ряда взаимно просты, то $P = 1$ и, следовательно, все цифры старших разрядов рассматриваемых кошачьих чисел равны 1. В разряде единиц этих чисел не могут стоять цифры 4 и 8 (убедитесь в этом самостоятельно). Значит, подряд может стоять самое большее три кошачьих числа.

Задачи

(см. с.25)

1. В обоих случаях периметр банкетного стола равен $2na + 2a$, где n – количество столов размером $a\times a$.

2. Жулики смогут переправиться. Вначале первый жулик отвозит на противоположный берег свои чемоданы и возвращается, чтобы забрать двух других жуликов. После переправы втроем на противоположный берег первый жулик остается со своими чемоданами, а второй и третий жулик возвращаются. Затем второй жулик вместе со своими чемоданами плывет к первому жулику, оставляет там свои чемоданы и вместе с первым жуликом возвращается к третьему жулику. Втроем приплывают к противоположному берегу, первый и второй жулики остаются на берегу, а третий жулик плывет за своими чемоданами.

3. Данные задачи позволяют восстановить год первого выпуска журнала, но это и так указано на его титульной странице – 1970 год. Итого: 37 лет. Ранее в «Задачнике» печаталось $12\times5=60$ задач по математике в год, сейчас $15\times3=45$ и еще 150 задач за первые 3 года издания по 6 номеров в год. Если периодичность выпуска журнала изменилась по прошествии x лет, то номер последней задачи в 2006 году должен быть $60x + 45(34 - x) + 150$. Можно подсчитать (а еще проще – подсмотреть) номер последней математической задачи в этом году – М2025. Из уравнения $60x + 45(34 - x) + 150 = 2025$ находим $x = 23$. Значит, с 1970 по 1992 год (это 23 года!) журнал «Квант» выходил ежемесячно, а начиная с 1993 года стал выходить по шесть номеров в год.

4. Это можно сделать для любых натуральных $N\ge2$. На рисунке 3 приведен пример для $N = 3$. Треугольник AB_0C разбит на треугольники AB_0B_1, AB_1B_2 и AB_2C такие, что $B_0B_1:B_1B_2:B_2C=1:2:4$. Точки D_0 и D_1 лежат на пересечении средней линии DD_2 с отрезками AB_1 и AB_2, поэтому B_0D_0, B_1D_1 и B_2D_2 – медианы треугольников разбиения.

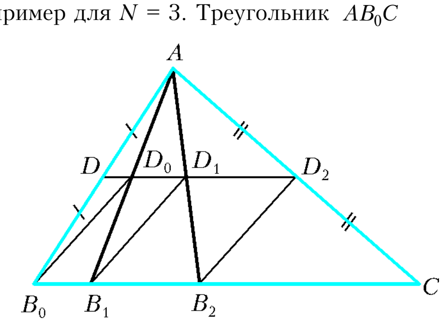


Рис. 3

Поскольку средняя линия параллельна основанию и вдвое меньше его, то она разбивается в том же отношении 1 : 2 : 4. Значит, $D_0D_1=B_0B_1$ и $D_1D_2=B_1B_2$. Поэтому $B_0D_0D_1B_1$ и $B_1D_1D_2B_2$ – параллелограммы, откуда все медианы параллельны и равны.
В общем же случае точки $B_1,B_2,\ldots,B_{N-1}$ делят сторону B_0C

в отношении $1:2:2^2:\ldots:2^{N-1}$, остальные рассуждения аналогичны.

5. Число 20 – у второго логика, 30 – у третьего.

Пусть a_1, a_2, a_3 – числа, написанные на лбу первого, второго и третьего логиков соответственно. После того как все логики высказались по одному разу, можно заключить, что $a_1 \neq a_2$, $a_1 \neq a_3$, $a_2 \neq a_3$. Действительно, если бы, например, выполнялось равенство $a_2 = a_3$, то первый логик сделал бы вывод, что ненулевое число, написанное у него на лбу, может быть только суммой $a_2 + a_3$ и сразу сообщил бы ответ.

Кроме того, $a_1 \neq 2a_3$. Предположим, что это не так: пусть $a_1 = 2a_3$. Тогда ответ смог бы сообщить второй логик, рассуждая следующим образом. Поскольку известно, что $a_2 \neq a_3$, то $a_2 + a_3 \neq 2a_3$, т.е. $a_2 + a_3 \neq a_1$. Так как к тому же $a_1 > a_3$, то $a_1 + a_2 \neq a_3$. Значит, $a_2 = a_1 + a_3$, т.е. $a_2 = 3a_3$ – ответ. Но второй логик промолчал, следовательно, $a_1 \neq 2a_3$. Аналогично доказываются неравенства $a_1 \neq 2a_2$ и $a_2 \neq 2a_1$ – в предположении, что это не так, свой ответ сообщает третий логик.

Подытоживая, заключаем, что после трех ответов логиков величина a_1 не может быть равной $a_2, a_3, 2a_2, 2a_3, \frac{a_2}{2}$ – назовем совокупность этих величин «запрещенным» множеством.

А теперь приведем рассуждения первого логика, когда он сообщил свой ответ. На его лбу могло быть написано либо число $a_2 + a_3$, либо число $|a_2 - a_3| \neq 0$. Однозначный вывод можно сделать лишь в том случае, если одно из этих двух чисел принадлежит «запрещенному» множеству. Здесь придется осуществить перебор. Легко проверить, что сумма $a_2 + a_3$ не может принадлежать «запрещенному» множеству. Перебирая различные возможности для $|a_2 - a_3|$, приходим к следующим вариантам: либо $a_3 = 2a_2$, либо $a_3 = 3a_2$, либо $a_2 = 2a_3$, либо $a_2 = 3a_3$, либо $2a_3 = 3a_2$. В первых четырех случаях для величины $a_1 = a_2 + a_3$ получаем либо $a_1 = 3a_2$, либо $a_1 = 3a_3$, либо $a_1 = 4a_2$, либо $a_1 = 4a_3$. Ни в одном из этих случаев для натуральных чисел a_2, a_3 не может получиться число 50. Остается последний вариант $2a_3 = 3a_2$. В этом случае $a_1 = a_2 + a_3 = \frac{5}{2}a_2 = 50$, откуда $a_2 = 20$ и $a_3 = 30$.

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

1. $\delta = \frac{\lambda(aL - F(a+L))}{al} = 0{,}5$ мм. **2.** $x = \frac{(a+b)m\lambda}{2a(n-1)\alpha}$.

3. $m = \frac{2h\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{\lambda} + \frac{1}{2} = 795$.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

1. Да. Более того, $f(x) = 2x - \frac{11}{3}$ является единственным решением предложенного функционального уравнения (в классе функций, определенных на всей числовой прямой).

2. Нет. Более того, предложенное функциональное уравнение вообще не имеет решений в классе функций, определенных на всей числовой прямой.

3. $f(x) = \frac{3 - x^3}{4x}$.

4. $f(2001) = 2001^2$ (общее решение исходного функционального уравнения имеет вид $f(x) = x^2 + g(x)$, где $g(x)$ – произвольная периодическая функция с периодом $T = 1$, определенная на всей числовой прямой).

5. $f(x) \equiv 0$; $f_c(x) \equiv 1$ при $x \neq 0$, $f_c(0) = c$, где c – произвольная константа.

6. $\frac{5\sqrt{3}}{24}$ ($f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{6}x$ для рациональных x).

7. $\frac{\sqrt{3}}{27}$ ($f(x) = 3^x$ для рациональных x).

8. Да (докажите методом математической индукции, что $f(n) = \cos n$).

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Математика

Вариант 1

1. $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Преобразуйте уравнение к виду

$8\sin^2 x\cos x - 6\sin 2x\cos x + 2\cos x = 0$.

2. $[-1;1) \cup \left[\frac{13+\sqrt{97}}{4}; +\infty\right)$.

3. $\left(-\frac{12}{35}; \frac{8}{35}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. *Указание*. Положив $\frac{y}{x} = a$, $x - y = b$, приведите систему к виду

$$\begin{cases} 3a^2 = 2ab - b, \\ 2a = ab + 3b. \end{cases}$$

Сложив уравнения последней системы, имеем

$$3a^2 + 2a = 3ab + 2b, \text{ т.е. } (3a+2)(a-b) = 0.$$

Следовательно, либо $a = b$, либо $a = -\frac{2}{3}$.

4. $\frac{52}{\sqrt{231}}$; $\pi - 2\arccos\frac{13}{20} = \arccos\frac{31}{200}$.

Пусть окружность, вписанная в пятиугольник, касается сторон AB, BC, CD, DE и EA в точках A_1, B_1, C_1, D_1 и E_1 соответственно, имеет центр O и радиус r (сделайте рисунок). Положим $B_1B = x$. Тогда $BA_1 = x$. Так как $B_1C = CC_1$ и $BC = CD$, то получаем $C_1D = x$, тогда $DD_1 = x$. Поскольку $ED_1 = EE_1$ и $AE = ED$, то $AE_1 = DD_1 = x$. Следовательно, $AA_1 = x$ и $AB = 2x = 8$. Пусть $\angle AED = 2\alpha$, $\angle BCD = 2\beta$, $\angle BAD = \gamma$, $\angle ABD = \delta$, $\angle BDA = \varphi$. Заметим, что $\angle OBA = \angle OBC = \angle OAB = \angle OAE = \angle ODE = \angle ODC = \operatorname{arctg}\frac{r}{x}$. Тогда $\angle CDE = 2\angle ODC = \varphi + \frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{2} - \beta$, $\angle EAB = 2\angle OAB = \gamma + \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\angle ABC = 2\angle OBA = \delta + \frac{\pi}{2} - \beta$ и справедливы равенства $\gamma + \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi + \varphi - \alpha - \beta = \delta + \frac{\pi}{2} - \beta$. Отсюда $\alpha = \frac{\pi}{2} + \varphi - \delta$, $\beta = \frac{\pi}{2} + \varphi - \gamma$, $\angle CDE = \gamma + \delta - \varphi = \pi - 2\varphi$. Далее, из ΔDOD_1 получаем $\angle ODD_1 = \frac{\angle CDE}{2} = \frac{\pi}{2} - \varphi$, и искомый радиус $r = x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 4\operatorname{ctg}\varphi$. Итак, осталось найти угол φ, для чего воспользуемся теоремой косинусов в ΔABD. Получаем $64 = 81 + 100 - 2\cdot 9\cdot 10\cdot\cos\varphi$, т.е. $\cos\varphi = \frac{13}{20}$, $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = -\frac{31}{200}$. Отсюда $\angle CDE = \arccos\frac{31}{200}$. Наконец, $r = \frac{4\cos\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}} = \frac{52}{\sqrt{231}}$.

5. 2; $\frac{8 \pm 2\sqrt{7}}{3}$.

Первое уравнение системы задает множество окружностей с центрами $O_t(t-1; 3t-1)$ и радиусами $R_t = |t|$. Каждая такая окружность имеет с прямой $x = -1$ единственную общую точку $A_t(-1; 3t-1)$, т.е. касается прямой $x = -1$ в точке A_t.

Второе уравнение системы задает окружность с центром $O(2;5)$ и радиусом $R = 3$ и также касается прямой $x = -1$ в точке $A(-1;5)$. Система имеет единственное решение, если окружности касаются. Заметим, что касание окружностей может быть лишь при $t > 0$, так как при $t \le 0$ окружности лежат по разные стороны относительно прямой $x = -1$ и $A_t \ne A$. При $t > 0$ возможны два случая. В первом случае касание происходит на прямой $x = -1$, во втором случае условие касания определяется уравнением $OO_t^2 = (R_t + R)^2$.

6. 1) $\arcsin\frac{2}{3}$; 2) $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{7}{5}}$; 3) $\frac{14\sqrt{35}}{3}$.

Пусть O – центр сферы, $r = 2$ – ее радиус. Обозначим $BC = B_1C_1 = a = 1$, $AD = A_1D_1 = b = 6$. Через O проведем плоскость Π перпендикулярно боковым ребрам призмы. Пусть Π пересекает прямые AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 в точках A', B', C', D'. Точки A', B', C', D' являются точками касания прямых AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 со сферой. Центр O лежит на прямой $A'D' = \Pi \cap (AA_1D_1D)$. Таким образом, $A'D'$ – диаметр сферы и диаметр окружности, описанной около четырехугольника $A'B'C'D'$. Отсюда $A'D' = 2r = 4$. При проектировании на плоскость Π параллельные отрезки AD и BC переходят в параллельные отрезки $A'D'$ и $B'C'$, т.е. $A'B'C'D'$ – вписанная трапеция и, следовательно, равнобокая трапеция. Каждое из отношений $\frac{A'D'}{AD}$, $\frac{B'C'}{BC}$ равно косинусу угла между AD (или BC, или B_1C_1, или A_1D_1) и плоскостью Π и также оно равно синусу угла φ между AD и боковым ребром призмы. Находим $\sin\varphi = \frac{A'D'}{AD} = \frac{2r}{b} = \frac{2}{3}$, т.е. $\angle(AD, CC_1) = \arcsin\frac{2}{3}$.

Имеем $\frac{A'D'}{AD} = \frac{B'C'}{BC}$, откуда $B'C' = \frac{2ar}{b}$. Двугранный угол между гранями CC_1D_1D и DD_1A_1A равен $\angle C'D'A' = \angle B'A'D'$. В трапеции $A'B'C'D'$ проведем высоту OH (которая является осью симметрии трапеции). Далее,

$$OH = \sqrt{OB'^2 - B'H^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{B'C'}{2}\right)^2} = \frac{r}{b}\sqrt{b^2 - a^2},$$

$$\operatorname{tg}\angle B'A'D' = \frac{OH}{A'O - B'H} = \sqrt{\frac{b+a}{b-a}} = \sqrt{\frac{7}{5}}.$$

Следовательно, искомый двугранный угол равен $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{7}{5}}$.

Площадь

$$S_{A'B'C'D'} = \frac{1}{2}(A'D' + B'C')OH = \frac{r^2(a+b)}{b^2}\sqrt{b^2 - a^2}.$$

Пусть K и L – середины оснований AD и BC. Поскольку $ABCD$ – равнобокая трапеция, $KL \perp AD$. Прямая OH – проекция прямой KL на плоскость Π. Так как $OH \perp A'D'$, то $KL \perp A'D'$. Таким образом, KL перпендикулярна двум непараллельным прямым AD и $A'D'$, лежащим в плоскости AA_1D_1D, значит, KL перпендикулярна плоскости AA_1D_1D. Отсюда $KL \perp AA_1$, следовательно, проекция прямой AA_1 на плоскость $ABCD$ перпендикулярна KL, т.е. проекцией прямой AA_1 на плоскость $ABCD$ является прямая AD. Значит, угол β между AA_1 и $ABCD$ равен углу φ между AA_1 и AD. Имеем $\sin\beta = \sin\varphi = \frac{2r}{b}$. Площадь основания

$$S_{ABCD} = \frac{S_{A'B'C'D'}}{\sin\beta} = \frac{r(a+b)}{2b}\sqrt{b^2 - a^2}.$$

По условию высота призмы равна $2r$, поэтому ее объем

$$V = 2rS_{ABCD} = \frac{r^2(a+b)}{b}\sqrt{b^2 - a^2} = \frac{14\sqrt{35}}{3}.$$

Вариант 2

1. $(0;0)$, $(4;\pm 2)$. *Указание.* При $y = 0$ получаем $x = 0$. Пусть $y \ne 0$. Перемножив почленно уравнения системы, получим $30x^2y^2 = 8(x^4 - y^4)$. Пусть $t = \left(\frac{x}{y}\right)^2 > 0$, тогда $4t^2 - 15t - 4 = 0$. Отсюда $t = 4$. Итак, $x = \pm 2y$. При $x = 2y$ из второго уравнения системы находим $y = 2$, $x = 4$. При $x = -2y$ аналогично находим $y = -2$, $x = 4$.

2. $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Исходное уравнение эквивалентно совокупности $\cos 3x = 0$ либо $\sqrt{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)} = 2\cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$ при $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) \ge 0$.

В первом случае $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$. При $n = 3k$ имеем $x = \frac{\pi}{6} + \pi k$ и $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} - \pi k\right) = \operatorname{ctg}\frac{7\pi}{12} < 0$, т.е. $x = \frac{\pi}{6} + \pi k$ – не решения. При $n = 3k \pm 1$ имеем $x = \frac{\pi}{6} + \pi k \pm \frac{\pi}{3}$ и

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} - \pi k \mp \frac{\pi}{3}\right) = \left[\begin{aligned} &\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} > 0, \\ &\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{12} < 0. \end{aligned}\right.$$

Следовательно, $x = \frac{\pi}{6} + \pi k + \frac{\pi}{3}$ – решения, а $x = \frac{\pi}{6} + \pi k - \frac{\pi}{3}$ – нет.

Во втором случае

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = 4\cos^2\left(\frac{3\pi}{4} - x\right),$$

причем $\cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) \ge 0$. Отсюда либо $\cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = 0$, либо

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = -\cos 2x = \frac{1}{2}.$$

Значит, либо $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ – решения, либо $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$. При $k = 2m$ получаем $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m$ и

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4} \mp \frac{\pi}{3}\right) = \left[\begin{aligned} &\cos\frac{5\pi}{12} > 0, \\ &\cos\frac{13\pi}{12} < 0. \end{aligned}\right.$$

Следовательно, $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi m$ – решения, а $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi m$ – нет. Если $k = 2m + 1$, то $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi + 2\pi m$ и

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \pi \mp \frac{\pi}{3}\right) = \left[\begin{aligned} &-\cos\frac{5\pi}{12} < 0, \\ &-\cos\frac{11\pi}{12} > 0. \end{aligned}\right.$$

Следовательно, $x = \frac{\pi}{3} + \pi + 2\pi m$ – не решения, а $x = -\frac{\pi}{3} + \pi + 2\pi m$ – решения.

3. $\left(3 - \sqrt{\frac{7}{2}}; 2\right) \cup (2;3] \cup \left[\frac{11}{3}; \frac{41 - \sqrt{65}}{8}\right) \cup \left(3 + \sqrt{\frac{7}{2}}; 5\right)$. *Указание.* Так как $12x - 10 - 2x^2 = (10 - 2x)(x - 1)$, находим, что ОДЗ имеет вид $0 < 10 - 2x \ne 1$ и $0 < x - 1 \ne 1$, т.е. $x \in (1;2) \cup \left(2; \frac{9}{2}\right) \cup \left(\frac{9}{2}; 5\right)$. Пусть $y = \log_{x-1}(10 - 2x)$. Тогда $\frac{2}{1+y} \le \frac{y}{2y-1}$, и $\frac{y^2 - 3y + 2}{(y+1)(2y-1)} = \frac{(y-1)(y-2)}{(y+1)(2y-1)} \ge 0$. Следовательно, $y \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right] \cup [2; +\infty)$. Дальнейшее ясно.

4. $\dfrac{4+\sqrt{15}}{12}R$.

По теореме синусов находим $\sin\angle C = \dfrac{AB}{2R} = \dfrac{1}{2}$ и $BC = 2R\sin\angle A = \dfrac{4}{3}R > R = AB$. Так как в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, то острый угол A больше угла C. Следовательно, угол C острый и $\cos\angle C = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда $\cos\angle B = -\cos(\angle A + \angle C) = \dfrac{2-\sqrt{15}}{6} < 0$. Пусть r_1 — радиус окружности O_1. Так как $\angle B$ тупой, то $2r_1 > R$. По теореме Пифагора, $\dfrac{AC}{2} = \sqrt{R^2 - (2r_1 - R)^2} = 2\sqrt{Rr_1 - r_1^2}$.

По теореме синусов, $\sin\angle B = \dfrac{AC}{2R} = \dfrac{2\sqrt{Rr_1 - r_1^2}}{R}$. Тогда $\cos\angle B = \dfrac{R-2r_1}{R} = \dfrac{2-\sqrt{15}}{6}$, а $r_1 = \dfrac{4+\sqrt{15}}{12}R$.

5. $\left(\sqrt{\dfrac{49}{36} - \dfrac{2\cos a}{3} - \dfrac{\sin a}{3}} - \dfrac{1}{3}\right)^2 - \dfrac{5}{4}$; $\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$.

Заметим, что значение $f(x,y)$ есть квадрат расстояния от точки A с координатами $\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$ до точки $(x; y)$ минус $\dfrac{5}{4}$. Для любого $a \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ заданное множество точек $M(a)$ есть круг с центром в точке $O(a) = \left(\dfrac{\cos a}{3}; \dfrac{\sin a}{3}\right)$ радиусом $\dfrac{1}{3}$. Видим, что $A \notin M(a)$ для всех $a \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$, так как

$$AO(a)^2 = \left(1 - \frac{\cos a}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin a}{3}\right)^2 = \frac{5}{4} - \frac{2\cos a}{3} - \frac{\sin a}{3} + \frac{1}{9} > \frac{1}{9}.$$

Поэтому

$$\min_{M(a)} f = g(a) = \left(AO(a) - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{5}{4}.$$

Максимум значения $g(a)$ при $a \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ достигается при максимуме функции $h(a) = -\dfrac{2\cos a}{3} - \dfrac{\sin a}{3}$. Так как $h'(a) = \dfrac{2\sin a}{3} - \dfrac{\cos a}{3} = 0$ при $a = \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ и справедливы неравенства

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{3} < h\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{3} < h\left(\pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

то максимум значения $g(a)$ достигается при $a = \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$.

6. $\dfrac{9}{\sqrt{2}}$; $\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{7}{5}}$; $\dfrac{81}{2\sqrt{2}}$.

Пусть O – центр сферы. Тогда отрезки OB_1 и OA_1 перпендикулярны соответствующим граням и поэтому лежат на высотах пирамиды, т.е. высоты AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O и лежат в одной плоскости. Плоскость, проходящая через AA_1 и BB_1, перпендикулярна CD, так как AA_1 и BB_1 перпендикулярны CD, и пересекает отрезок CD в точке F. Далее, $B_1F = A_1F$ как касательные, проведенные к сфере из точки F. Так как $OB_1 = OA_1 = R$, где R – радиус сферы, и $\angle B_1OA = \angle A_1OB$ как вертикальные, то $\Delta OB_1A = \Delta OA_1B$ и $AB_1 = BA_1$. Поэтому $AF = BF$. Заметим, что прямоугольные треугольники AFC и BFC равны, так как $AF = BF$ и CF — их общая сторона. Следовательно, $AC = BC$. Аналогично, $\Delta BDF = \Delta ADF$ и $AD = BD$.

Рассмотрим равнобедренный ΔABF. Пусть FT — его высота. Тогда FT перпендикулярен AB и CD, т.е. FT — искомое расстояние между AB и CD. Обозначим $\angle OBF = \varphi$. Тогда $\angle OFB = \angle ABO = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}$. Имеем $TK = TL = \dfrac{KL}{2} = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{6}{5}}$, $LB = AK = \dfrac{AB - KL}{2} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)$, $TB = TL + LB = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$. Далее находим $\dfrac{R}{OB} = \sin\varphi$, $\dfrac{TB}{OB} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right)$, т.е. $\dfrac{3}{\sqrt{2}} = OB\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right)$, $R = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\dfrac{\sin\varphi}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right)}$. По теореме косинусов из ΔOLB находим

$$R^2 = OB^2 + LB^2 - 2\cdot LB\cdot OB\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right),$$

откуда $R = \dfrac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{tg}\varphi$. Таким образом,

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\cos\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}} = \cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2},$$

т.е. $\sin\varphi = \dfrac{4}{5}$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right) = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right) = 3$, и искомое расстояние

$$FT = TB\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{9}{\sqrt{2}}.$$

Заодно находим

$$AF = BF = \frac{TB}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} = 3\sqrt{5}, \quad FC = \sqrt{AC^2 - AF^2} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Пусть h – расстояние от точки F до плоскости ABC, а d – расстояние от центра сферы O до плоскости ABC. Тогда $\dfrac{h}{d} = \dfrac{FT}{OT}$. Так как $OT = TB\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, то $\dfrac{h}{d} = 9$. Радиус искомой окружности $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. Радиус рассматриваемой сферы $R = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\dfrac{\sin\varphi}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right)} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$. Для вычисления h имеем $3V_{ABCF} = h\cdot S_{ABC} = AA_1\cdot S_{FBC}$, т.е. $h = AA_1\cdot\dfrac{S_{FBC}}{S_{ABC}}$.

Так как $AA_1 = AB\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right) = \dfrac{9}{\sqrt{5}}$, $S_{ABC} = \dfrac{AB}{2}\sqrt{BC^2 - \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} = 9\sqrt{\dfrac{5}{2}}$, $S_{FBC} = \dfrac{FC\cdot BF}{2} = \dfrac{9}{2}\sqrt{\dfrac{5}{2}}$, то $h = \dfrac{9}{2\sqrt{5}}$, $d = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$, и искомый радиус $r = \sqrt{\dfrac{16}{5} - \dfrac{1}{20}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{7}{5}}$.

Наконец, искомый объем $V_{ABCD} = \dfrac{AA_1}{3}\cdot S_{BCD}$, где $S_{BCD} = \dfrac{CD\cdot BF}{2}$, $CD = FC + DF$, $DF = \sqrt{AD^2 - AF^2} = 3\sqrt{2}$, $CD = \dfrac{9}{\sqrt{2}}$, $S_{BCD} = \dfrac{27\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$. Отсюда получаем $V_{ABCD} = \dfrac{81}{2\sqrt{2}}$.

Вариант 3

1. $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi k}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$. **2.** $(-1; 3; 2)$. **3.** $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

4. 8; $\pi - \arccos\dfrac{2}{3}$; 5. **5.** $b = 0$.

6. $\dfrac{a\sqrt{26}}{6}$; $a\sqrt{\dfrac{3}{8}}$; $\dfrac{a}{\sqrt{24}}$.

Физика

Вариант 1

1. Начальную скорость автомобиля v_0 находим из условия $s = \frac{1}{2}v_0 t$. Скорость v на середине тормозного пути s ($v^2 = 2a\frac{s}{2}$) связана с начальной скоростью ($v_0^2 = 2as$) соотношением $v = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$. Отсюда получаем

$$v = \frac{s\sqrt{2}}{t} = 7 \text{ м/с}.$$

2. Задачу можно решить, воспользовавшись известным соотношением для молярных теплоемкостей (формулой Майера) $C_p - C_V = R$. Тогда

$$Q_p = \nu C_p \Delta T, \ Q_V = \nu C_V \Delta T, \ \Delta Q = \nu\left(C_p - C_V\right)\Delta T = \frac{m}{\mathrm{M}} R\Delta T.$$

Отсюда находим искомую молярную массу:

$$\mathrm{M} = m\frac{R\Delta T}{\Delta Q} = 0{,}1 \text{ кг/моль}.$$

3. 1) Так как по условию схема эквивалентна батарее при *любой* нагрузке, можно рассмотреть такие частные случаи, при которых задача решается легче всего. Например, $\mathcal{E}_0$ равно напряжению на разомкнутых клеммах, а r_0 можно найти, зная, что по проводнику, замыкающему клеммы накоротко, будет течь ток $\mathcal{E}_0/r_0$.
При разомкнутых клеммах A и B ток в контуре не идет, и $U_{AB} = \mathcal{E}$, откуда получаем $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$. Если клеммы A и B замкнуть перемычкой с нулевым сопротивлением, то $U_{AB} = 0$, поэтому через батареи потекут токи

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r+R} \text{ и } I_2 = \frac{\mathcal{E}}{r}.$$

Ток через перемычку AB будет равен

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\mathcal{E}}{r+R} + \frac{\mathcal{E}}{r} = \mathcal{E}\frac{2r+R}{r(R+r)}.$$

Отсюда находим

$$r_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{I} = \frac{r(R+r)}{2r+R}.$$

2) При подключении к батарее $\left(\mathcal{E}_0, r_0\right)$ резистора сопротивлением R_x на нем будет выделяться мощность

$$P = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{r_0 + R_x}\right)^2 R_x = \frac{\mathcal{E}_0^2 R_x}{\left(r_0 + R_x\right)^2}.$$

Это выражение максимально при $R_x = r_0$ (в чем можно убедиться, например, с помощью производной). Значит,

$$R_x = \frac{r(R+r)}{2r+R}.$$

4. Увеличенное изображение предмета может дать только *собирающая* линза (ее фокусное расстояние $F > 0$). Увеличение равно

$$\Gamma = \frac{f}{d} = \frac{F}{d-F} = \frac{F}{x},$$

где d – расстояние от предмета до линзы, а $x = d - F$ – расстояние от предмета до ближайшего к нему фокуса. Положения предмета, дающие двукратное увеличение, соответствуют $x = F/2$ и расположены симметрично относительно фокуса на расстоянии $F/2$ от него, т.е. $d_1 = F/2$ и $d_2 = 3F/2$. Расстояние между этими положениями равно F, что по условию равно 6 см + 3 см = 9 см. Значит, F = 9 см.
Теперь находим начальное положение предмета:

$$x_0 = \frac{3 \text{ см} + 6 \text{ см}}{2} - 3 \text{ см} = 1{,}5 \text{ см}$$

и начальное увеличение:

$$\Gamma_0 = \frac{F}{x_0} = \frac{9 \text{ см}}{1{,}5 \text{ см}} = 6.$$

5. 1) Обозначим скорость нижнего груза v, тогда скорость верхнего будет $v/4$. Из закона сохранения энергии

$$\frac{m(v/4)^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mgl\left(1-\cos\varphi_0\right) + mg\cdot 4l\left(1-\cos\varphi_0\right)$$

находим

$$v = 4\sqrt{\frac{10}{17}gl\left(1-\cos\varphi_0\right)} = 4\sqrt{\frac{5}{17}gl}.$$

2) Для нахождения периода колебаний необходимо получить уравнение гармонических колебаний $\varphi'' + \omega^2\varphi = 0$, и тогда

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Запишем закон сохранения энергии в виде

$$\frac{m(l\varphi')^2}{2} + \frac{m(4l\varphi')^2}{2} - mgl\cos\varphi - mg\cdot 4l\cos\varphi = \text{const},$$

или

$$17l\varphi'^2 - 10g\cos\varphi = \text{const},$$

где φ' – угловая скорость маятника. Теперь продифференцируем последнее соотношение по времени:

$$17l\cdot 2\varphi'\varphi'' + 10g\sin\varphi\cdot\varphi' = 0, \text{ или } \varphi'' + \frac{5g}{17l}\sin\varphi = 0.$$

При малых φ $(\sin\varphi = \varphi)$ получаем уравнение

$$\varphi'' + \frac{5g}{17l}\varphi = 0,$$

из которого находим

$$\omega^2 = \frac{5g}{17l}, \text{ и } T = 2\pi\sqrt{\frac{17l}{5g}}.$$

Вариант 2

1. $\mu = 1{,}5$. **2.** $C = 2R$. **3.** $q = -\frac{\mathcal{E}S\varepsilon_0\varepsilon_2\left(\varepsilon_1 - 1\right)}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}$.

4. Ток равен 3 А и направлен вверх. **5.** $k = \frac{4}{3}$.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОНИКИ И МАТЕМАТИКИ

Математика

Вариант 1

1. $[-2; -1) \cup (0; 2]$. **2.** 3. **3.** $\frac{1}{2}$; 2. **4.** 3. **5.** 10.

6. $-\arcsin\frac{1}{3} + (2n+1)\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **7.** (0; 3]. **8.** $4\sqrt{2}$.

9. -1 ; 2. *Указание.* Для случаев $a \geq 0$ и $a < 0$ рассмотрите пересечение представителей семейства прямых $y = ax + a^2 - 2a - 2$ с верхней полуокружностью с центром $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ и радиусом $\frac{5}{2}$.

Вариант 2

1. $(-\infty; 0) \cup \left[1; \frac{3}{2}\right) \cup [3; +\infty)$. **2.** 3; 6.

3. $\left(-1; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[0; \frac{1}{3}\right)$. **4.** 4; $-\frac{17}{4}$. **5.** $\frac{21}{17}$. **6.** -3.

7. $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

8. 3. *Указание*. Плоскость SAC перпендикулярна основанию пирамиды. При ортогональной проекции на плоскость, перпендикулярную прямой AB, задача сводится к вычислению расстояния между проекцией прямой SC и точкой, в которую проецируется прямая AB.

9. $\left(-\frac{5}{2}; 0\right] \cup \left(\frac{10}{3}; 8\right]$.

Физика

Вариант 1

1. $U_2 = U_1 \frac{R_2}{R_1} = 50$ В. **2.** $T = 2\pi \frac{R_3 + h}{R_3} \sqrt{\frac{R_3 + h}{g}} = 1{,}5$ ч.

3. $n = \frac{1}{k} \frac{\Delta p}{\Delta T} = 2{,}4 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

4. $u_1 = v_2 = 3{,}0$ м/с, $u_2 = v_1 = 6{,}0$ м/с. **5.** $x = \frac{a}{2}$.

Вариант 2

1. $F_д = mg - F \sin\alpha = 15$ Н.

2. $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \sqrt{q_1^2 + q_2^2} = 65{,}5$ кВ/м.

3. $W_{выд} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} = 95$ мДж, где

$$v = \frac{\sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 - 2 m_1 m_2 v_1 v_2 \cos(\pi - \alpha)}}{m_1 + m_2} = 3{,}3 \text{ м/с}.$$

4. $q = \frac{\mathcal{E} C R_2}{R_1 + R_2 + r} = 3{,}6 \cdot 10^{-11}$ Кл. **5.** $\alpha = \arccos\left(\frac{3}{2} - \frac{m}{2M}\right)$.

МОСКОВСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. 16,5. *Указание*. Запишите данное выражение в виде $\left(5^{\log_5 49}\right)^{2 \log_7 2}$.

2. $f'(x) = 2{,}8\left(\cos 2{,}8x + e^{-2{,}8x}\right)$. **3.** Увеличилась на 35%.

4. $(2; 3) \cup (3; 4)$. *Указание*. Заметьте, что $6x - x^2 - 8 = 1 - (x-3)^2$, $x^2 - 6x + 10 = 1 + (x-3)^2$, и рассмотрите случаи $x = 3$ и $x \neq 3$.

5. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание*. Заметьте, что $\sin x > 0$ и $\cos x > 0$.

6. $\left[3\frac{3}{4}; +\infty\right)$. *Указание*. Рассмотрите случаи $a < 3$, $a = 3$, $a > 3$.

7. −12; −9; 3; 4. *Указание*. Проверив, что $x = 0$ не является решением уравнения, поделите на x числитель и знаменатель каждой дроби и обозначьте $y = x - \frac{36}{x}$.

8. 288π. *Указание*. Обратите внимание на то, что осевое сечение конуса − правильный треугольник.

Вариант 2

1. 45.

2. $\frac{4}{3}$ или не определено. *Замечание*. Ответ $\frac{4}{3}$ верен в общем случае, когда выражение $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y$ определено; однако в случаях

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi k, \end{cases} n, k \in \boldsymbol{Z}, \quad \begin{cases} x = \pi n, \\ y = \pi k, \end{cases} n, k \in \boldsymbol{Z}$$

условие $\sin(x + y) = 7 \sin(x - y)$ выполняется, но выражение $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y$ не определено.

3. −7; 1. *Замечание*. $2^{\frac{1}{\log_6 2}} = 2^{\log_2 6} = 6$.

4. $(-\infty; -3) \cup \{-2\} \cup [1; +\infty)$. *Указание*. Разложите $x^2 + x - 2$ на множители и заметьте, что $x = -2$ удовлетворяет данному неравенству.

5. $\frac{1}{4}$. **6.** 5.

7. $[-11; 5)$. *Указание.* Рассмотрите случаи $x \geq 1$, $x < 1$ и не забудьте об ОДЗ.

8. $\frac{24\sqrt{3}}{\sqrt{67}}$. *Указание.* Найдите сторону основания, затем тангенс угла между основанием и боковой гранью и, наконец, синус этого угла.

Вариант 3

1. 140. **2.** $[1; +\infty)$.

3. 5. *Указание*. Рассмотрите случаи $x \geq 4$, $x < 4$ и не забудьте об ОДЗ.

4. $(-\pi; +\infty)$. **5.** $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$. **6.** 2.

7. При $k > 4$. *Указание*. Рассмотрите случаи $k < 2$, $k = 2$, $k > 2$.

8. 1, 2, 3.

Задачи устного экзамена

1. tg 8 < tg 6 < tg 7. *Указание*. Проверьте неравенства $1{,}75\pi < 6 < 2\pi$; $2\pi < 7 < 2{,}5\pi$; $2{,}5\pi < 8 < 2{,}75\pi$.

2. $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание*. Не забудьте об ОДЗ.

3. −3; 0. **4.** $(-2; -1] \cup [0; +\infty)$. **5.** $[-4; -1) \cup (1; 4]$.

6. 3. *Указание*. Проверьте, что $f(x)$ строго убывает.

7. $(-\infty; 1) \cup \left(1; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$. *Указание*. Разложите числитель и знаменатель на множители и обратите внимание на точки, в которых функция не определена.

8. См. рис.4. *Указание*. Заметьте, что $y = \left||x|^2 - 9|x| + 8\right|$ и воспользуйтесь правилом построения графиков $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$ по известному графику $y = f(x)$.

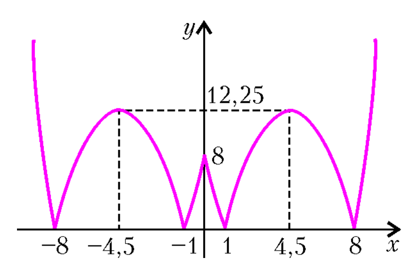


Рис. 4

9. $\frac{64}{3}$. *Указание*. Воспользуйтесь равенством углов, отмеченных на рисунке 5.

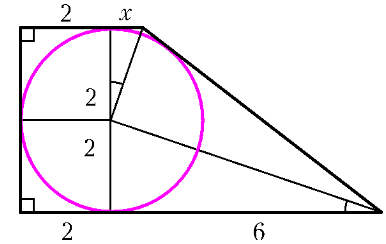


Рис. 5

10. $\frac{500\pi}{3}$. *Указание.* Тело вращения представляет собой цилиндр высоты 10 с радиусом основания, равным 5, из которого вырезаны два конуса высоты 5 с тем же радиусом основания.

Тест

1. е). **2.** д). **3.** з). **4.** г). **5.** г). **6.** б).

Физика

Вариант 1

1. 1). **2.** 1). **3.** 1) **4.** 1). **5.** 3). **6.** 1). **7.** 2). **8.** 3). **9.** 1). **10.** 2). **11.** 2). **12.** 2). **13.** 3). **14.** 1). **15.** 3). **16.** 0,3. **17.** 4 кг·м/с . **18.** 20 Дж. **19.** 2 А. **20.** 48 °С.

Вариант 2

1. 2). **2.** 3). **3.** 3). **4.** 1). **5.** 2). **6.** 1). **7.** 3). **8.** 3). **9.** 2). **10.** 2). **11.** 2). **12.** 1). **13.** 3). **14.** 1). **15.** 2). **16.** $1{,}65\cdot10^{-27}$ кг·м/с . **17.** 5 м. **18.** $5\cdot10^{5}$ В/м . **19.** 2,75 А. **20.** 341 Дж/(кг·К).

НАПЕЧАТАНО В 2006 ГОДУ

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»
kvant.info

Московский центр непрерывного математического образования
kvant.mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru

Костромской центр дополнительного образования «Эврика»
ceemat.ru

журнал Квант ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: 930-56-48
E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области
Тел./факс: (501) 443-92-17, (272) 6-25-36
E-mail: marketing@chpk.ru